1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Ο μαθητής πρέπει:

- να έχει κατανοήσει τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα και να είναι ικανός να σχεδιάζει το γινόμενο τους
- να γνωρίζει τις ιδιότητες του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα
- να έχει κατανοήσει την έννοια του γραμμικού συνδυασμού δύο ή περισσοτέρων διανυσμάτων και να τον αναπαριστά
- να γνωρίζει την συνθήκη παραλληλίας και την απόδειξη της
- να γνωρίζει πώς να εκφράζει τη διανυσματική ακτίνα του μέσου ενός τμήματος ως συνάρτηση των διανυσματικών ακτίνων των άκρων του

• Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Α. Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Έστω ένας πραγματικός αριθμός $\lambda \in \mathbb{R}$ και ένα διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$. Ορίζουμε σαν γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$ και συμβολίζουμε $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda\vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

1. Έχει μέτρο $|\lambda||\vec{\alpha}|$, δηλαδή ισχύει ότι $\left|\lambda \cdot \vec{\alpha}\right| = |\lambda||\vec{\alpha}|$.

2. **α.** Αν $\lambda > 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$,

β. Αν $\lambda < 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$,

γ. Αν $\lambda = 0$, τότε $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$.

Επίσης ορίζουμε $\lambda \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda > 0$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ τότε και $\lambda < 0$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\lambda \cdot \vec{\alpha} = \vec{0}$ τότε ή $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$.

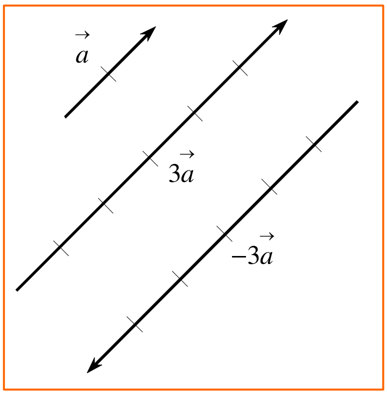
📖 **Πρόσεξε** ότι το γινόμενο $\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha}$ με $\lambda \neq 0$ το συμβολίζουμε και με $\frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$.

Παράδειγμα

Αν το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ έχει μέτρο 2, τότε:

- Το διάνυσμα $3\vec{\alpha}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο $|3\vec{\alpha}| = 3|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.

- Το διάνυσμα $-3\vec{\alpha}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{\alpha}$ και έχει μέτρο ίσο $|-3\vec{\alpha}| = |-3|\,|\vec{\alpha}| = 3 \cdot 2 = 6$.



1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Β. Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

Για το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες (χωρίς απόδειξη):

1. $\lambda(\vec{\alpha}+\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$

2. $(\lambda+\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\alpha}$

3. $\lambda(\mu\vec{\alpha})=(\lambda\mu)\vec{\alpha}$

4. $\lambda\vec{\alpha}=\vec{0}\Leftrightarrow\lambda=0$ ή $\vec{\alpha}=\vec{0}$

5. $(-\lambda\vec{\alpha})=\lambda(-\vec{\alpha})=-(\lambda\vec{\alpha})$

6. $\lambda(\vec{\alpha}-\vec{\beta})=\lambda\vec{\alpha}-\lambda\vec{\beta}$

7. $(\lambda-\mu)\vec{\alpha}=\lambda\vec{\alpha}-\mu\vec{\alpha}$

8. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$ και $\lambda\neq 0$, τότε $\vec{\alpha}=\vec{\beta}$

9. Αν $\lambda\vec{\alpha}=\mu\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$, τότε $\lambda=\mu$.

Γ. Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Ονομάζουμε **γραμμικό συνδυασμό** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v}=\kappa\vec{\alpha}+\lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa,\lambda\in\mathbf{R}$.
Για παράδειγμα τα διανύσματα $\vec{\gamma}$ και $\vec{\delta}$, όπου $\vec{\gamma}=3\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$ και $\vec{\delta}=-2\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.
Ανάλογα ορίζεται και ο γραμμικός συνδυασμός τριών ή περισσότερων διανυσμάτων. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\vec{v}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}+5\vec{\gamma}$ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.

Δ. Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Θέμα 5^{o}
Αποδείξτε ότι αν $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο διανύσματα με $\vec{\beta}\neq\vec{0}$ τότε
$\vec{\alpha}//\vec{\beta}\Leftrightarrow\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta},\lambda\in R$

Απόδειξη

⇨ (Αντίστροφο) Αν ισχύει η σχέση $\vec{\alpha}=\lambda\vec{\beta}$, $\lambda\in\mathbf{R}$, τότε όπως γνωρίζουμε από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, τα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

⇨ (Ευθύ) Αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

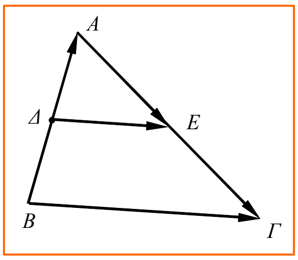
Θέτουμε $\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}$, όπου $\kappa \geq 0$, τότε $|\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|$. Συνεπώς:

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa > 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa\vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = -\kappa < 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$, οπότε αν θέσουμε $\lambda = \kappa = 0$, έχουμε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$.

Σε κάθε λοιπόν περίπτωση υπάρχει **μοναδικός** $\lambda \in \mathbf{R}$ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. ■

Εγκυκλοπαιδικά : Θα δείξουμε ότι ο λ είναι μοναδικός.
Έστω ότι υπάρχει και άλλος πραγματικός αριθμός μ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta}$, οπότε: $\lambda \cdot \vec{\beta} = \mu \cdot \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda \cdot \vec{\beta} - \mu \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda - \mu) \cdot \vec{\beta} = \vec{0} \overset{\vec{\beta} \neq \vec{0}}{\Leftrightarrow} \lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu$, άτοπο αφού εξ αρχής υποθέσαμε ότι $\lambda \neq \mu$. Επομένως δεν υπάρχει άλλος πραγματικός αριθμός μ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \mu \cdot \vec{\beta}$, οπότε ο λ είναι μοναδικός

Παράδειγμα
Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ του τριγώνου ΑΒΓ, να δειχθεί ότι $\overrightarrow{\Delta E} = \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.



Είναι: $\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{A\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{\Delta E}$.

Αφού λοιπόν $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta E}$, συμπεραίνουμε ότι $\Delta E // B\Gamma$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}|$, που σημαίνει ότι $\Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma$, δηλαδή αποδείξαμε διανυσματικά τη γνωστή μας από την Ευκλείδεια Γεωμετρία σχέση $\Delta E = // \frac{B\Gamma}{2}$.

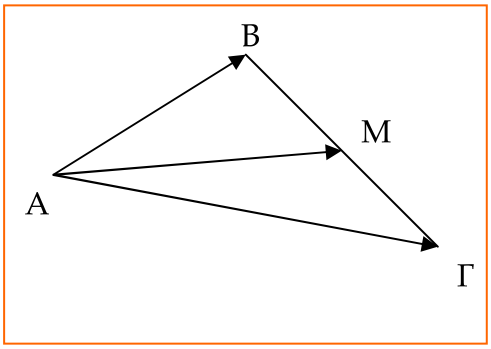
Δ. Διανυσματική Ακτίνα του Μέσου Τμήματος

Θέμα 6ο
Αποδείξτε ότι για την διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ ισχύει: $\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$.

Απόδειξη

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του μέσου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$. Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε: $2\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}$, άρα $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$. ■



📖 **Πρόσεξε** ότι αν θέλεις να εκφράσεις το άθροισμα δυο διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}$ που έχουν κοινή αρχή το σημείο Α σε συνάρτηση με ένα διάνυσμα, τότε θα χρησιμοποιείς τη σχέση:
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot\overrightarrow{AM}$, όπου Μ το μέσο του τμήματος $B\Gamma$.

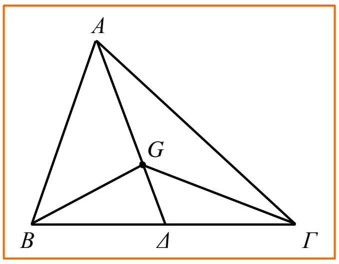
Εγκυκλοπαιδικά

Ε. Διανυσματική Ακτίνα του κέντρου βάρους

Να αποδειχτεί ότι ένα σημείο G είναι το κέντρο βάρους ενός τριγώνου ΑΒΓ, αν και μόνο αν ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ και ότι για οποιοδήποτε σημείο Ο ισχύει $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.

Απόδειξη

Γνωρίζουμε ότι αν G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $AG=2G\Delta$, όπου $A\Delta$ η διάμεσος του τριγώνου.



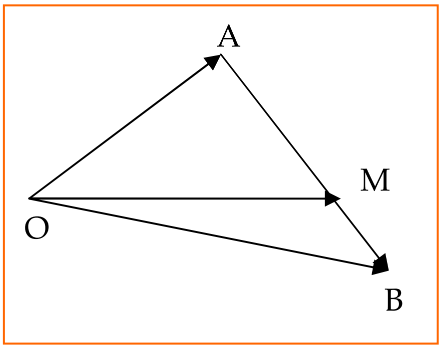
Επομένως, ισχύει $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{G\Delta}$, οπότε έχουμε
$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta}=\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{GG}=\vec{0}$.
Αντιστρόφως, αν για ένα σημείο G ισχύει $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$, τότε θα έχουμε $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{G\Delta}=\vec{0}$, όπου Δ το μέσον της ΒΓ, οπότε θα ισχύει $\overrightarrow{AG}=2\overrightarrow{G\Delta}$.
Έτσι, το σημείο G ανήκει στη διάμεσο ΑΔ και ισχύει $AG=2G\Delta$. Άρα, το G είναι το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

Από τη σχέση $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{G\Gamma}=\vec{0}$ έχουμε για τυχαίο σημείο Ο ότι:
$\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OG}=\vec{0}$. Άρα $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Gamma})$.

📖 **Πρόσεξε** ότι αν θέλεις να εκφράσεις το άθροισμα τριών διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}$ που έχουν κοινή αρχή το σημείο Α σε συνάρτηση με ένα διάνυσμα, τότε θα χρησιμοποιείς τη σχέση: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=3\cdot\overrightarrow{AG}$, όπου G το κέντρο βάρους του τριγώνου ΑΒΓ.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ΣΤ. Διανυσματική Ακτίνα του σημείου Μ που χωρίζει το τμήμα ΑΒ σε απλό λόγο λ, ($\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$) με $\lambda\neq -1,0$.



Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και ένα σημείο Μ εσωτερικό του τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}$, με $\lambda\neq -1,0$. Για το τυχαίο σημείο Ο του επιπέδου του ισχύει ότι $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{\lambda+1}$.

Απόδειξη

Για τη διανυσματική ακτίνα $\overrightarrow{OM}$ του σημείου Μ του τμήματος ΑΒ ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}$ (1) και $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$ (2).

Πολλαπλασιάζουμε επί λ και τα δυο μέλη της (2) και έχουμε $\lambda\cdot\overrightarrow{OM}=\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM}$ (3).

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3) έχουμε:

$\overrightarrow{OM}+\lambda\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AM}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM}$ (4).

Όμως $\overrightarrow{AM}=\lambda\cdot\overrightarrow{MB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=-\lambda\cdot\overrightarrow{BM}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}+\lambda\cdot\overrightarrow{BM}=\vec{0}$ (5). Η (4) λόγω της (5) μας δίνει: $(1+\lambda)\cdot\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}}{\lambda+1}$.

🕮 **Πρόσεξε** ότι για $\lambda=1$, έχουμε ότι το Μ είναι μέσο του ΑΒ και ισχύει ότι $\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+1\cdot\overrightarrow{OB}}{1+1}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}$.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Μεθοδολογικά σχόλια

1η Κατηγορία: Απόδειξη διανυσματικών ισοτήτων

Ξεκινάμε από το πιο σύνθετο μέλος, γράφοντας καθένα από τα διανύσματα ως άθροισμα ή διαφορά διανυσμάτων ώστε να εμφανίζονται τα διανύσματα του άλλου μέλους

ή

δεχόμαστε την ισότητα και με ισοδυναμίες καταλήγουμε σε κάτι αληθές

ή

παίρνουμε το πρώτο και κάνουμε πράξεις απλοποιώντας το, έπειτα παίρνουμε και το δεύτερο μέλος και προσπαθούμε κάνοντας πράξεις να φτάσουμε στο ίδιο απλοποιημένο αποτέλεσμα του πρώτου μέλους.

ή

Θεωρούμε σημείο αναφοράς, ένα τυχαίο σημείο Ο ή κάποιο από τα αναφερόμενα στην ισότητα και εκφράζουμε όλα τα διανύσματα της ισότητας ως διαφορά διανυσματικών ακτίνων με κοινή αρχή το σημείο αναφοράς.

ή

Χρήσιμα

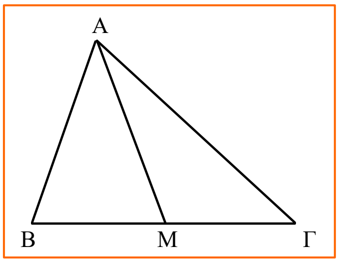
- **Διάσπαση διανύσματος με γραφή αθροίσματος ή διαφοράς**

Κάθε διάνυσμα μπορεί να αναλυθεί:

α. σε άθροισμα δύο διαδοχικών διανυσμάτων (ή περισσοτέρων), δηλαδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}$ ή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{EH}+\overrightarrow{HB}$.

β. σε διαφορά δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή, δηλαδή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$.

- **συμμάζεμα αθροίσματος δύο διανυσμάτων με κοινή αρχή - εμφάνιση διπλάσιου διαμέσου ή τέταρτης κορυφής παραλληλογράμμου**



Το άθροισμα δυο διανυσμάτων με κοινή αρχή ισούται με το διπλάσιο του διανύσματος της περιεχόμενης διαμέσου με την ίδια αρχή, δηλαδή ισχύει ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=2\cdot\overrightarrow{AM}$.

Παράδειγμα 1
Θεωρούμε τέσσερα σημεία Α, Β, Γ, Δ και ονομάζουμε Μ το μέσο του ευθύγραμμου τμήματος ΑΓ και Ν του ΒΔ . Να δείξετε ότι : $2\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.
Απάντηση
Έχουμε:

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$

$\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{\Gamma M}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{N\Delta}$

Άρα

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\cancel{\overrightarrow{AM}}+\overrightarrow{MN}+\cancel{\overrightarrow{NB}}+\cancel{\overrightarrow{\Gamma M}}+\overrightarrow{MN}+\cancel{\overrightarrow{N\Delta}}=2\overrightarrow{MN}$$

Παράδειγμα 2

Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε σημεία *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ*, *Ε* του επιπέδου ισχύει η ισότητα: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{E\Delta}+3\overrightarrow{AE}$.

Απάντηση

Έστω ότι ισχύει: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{E\Delta}+3\overrightarrow{AE}$.

Είναι

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{E\Delta}+3\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{EB}+\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{E\Gamma}+\overrightarrow{A\Delta}-\overrightarrow{E\Delta}=3\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma E}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta E}=3\overrightarrow{AE}\Leftrightarrow$$

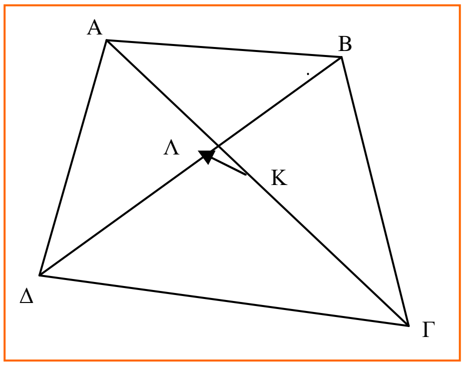
$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AE}=3\overrightarrow{AE}$ που ισχύει.

Παράδειγμα 3

Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$. Αν K,Λ τα μέσα αντίστοιχα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Delta}=4\cdot\overrightarrow{K\Lambda}$.

Απόδειξη

1ος τρόπος



Έχουμε κατά σειρά τα εξής:

$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Lambda}$

$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{B\Lambda}$

$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}$

$\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}$

Προσθέτουμε κατά μέλη και αφού λάβουμε υπόψη ότι $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{K\Gamma}=\vec{0}$ και $\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{K\Delta}=\vec{0}$ σαν άθροισμα αντιθέτων διανυσμάτων, έχουμε:

$$4\cdot\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Lambda}+\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{B\Lambda}+\overrightarrow{K\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}+\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Lambda}\Leftrightarrow$$

$$4\cdot\overrightarrow{K\Lambda}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Delta}$$

2ος τρόπος

Έστω Ο σημείο αναφοράς.

Έχουμε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Delta}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}+\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{OA}=$

$$=2\cdot\overrightarrow{OB}-2\cdot\overrightarrow{OA}-2\cdot\overrightarrow{O\Gamma}+2\cdot\overrightarrow{O\Delta}=2\cdot(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta})-2\cdot(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma})=2\cdot\overrightarrow{O\Lambda}-2\cdot\overrightarrow{OK}\Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma B}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{A\Delta}=2\cdot(2\cdot\overrightarrow{O\Lambda}-2\cdot\overrightarrow{OK})=4\cdot(\overrightarrow{O\Lambda}-\overrightarrow{OK})=4\cdot\overrightarrow{K\Lambda}.$$

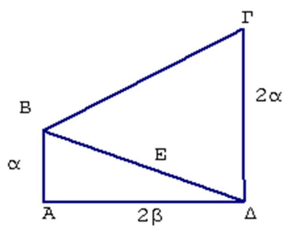
1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

2η Κατηγορία: Ζητείται, σε γεωμετρικό σχήμα (π.χ. τρίγωνο ή παραλληλόγραμμο κτλ) ότι ένα διάνυσμα είναι γραμμικός συνδυασμός άλλων

Ονομάζουμε $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα **δύο μη συγγραμμικά διανύσματα** τα οποία είναι **σταθερά (δίνονται,** συνήθως έχουν κοινό άκρο).
Εκφράζουμε το ζητούμενο διάνυσμα ως διαφορά διανυσματικών ακτινών με αρχή το κοινό άκρο των σταθερών διανυσμάτων. Το ίδιο κάνουμε και σε κάθε διανυσματική σχέση η οποία δίνεται από την υπόθεση της άσκησης.
Τα σταθερά διανύσματα έχουν ως αρχή τους κάποιο δοσμένο σημείο. Για παράδειγμα στο τρίγωνο σταθερά σημεία θεωρούνται οι κορυφές του, τα μέσα των πλευρών του, το βαρύκεντρο, το ορθόκεντρο κτλ.
Έτσι, γράφουμε κάθε άλλο διάνυσμα του προβλήματος **ως γραμμικό συνδυασμό των** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$.Τότε εμφανίζονται δύο μόνο διανύσματα και το πρόβλημα γίνεται απλούστερο. (Η επιλογή των βασικών διανυσμάτων βέβαια, γίνεται με κριτήριο την ευκολία έκφρασης των υπόλοιπων με βάση αυτά)

Παράδειγμα 1
άσκηση 4 σχολική σελ.27 . Στο διπλανό σχήμα έχουμε ΔΕ=2ΕΒ , $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}, \overrightarrow{\Delta\Gamma}=2\vec{a}$, και $\overrightarrow{\Delta A}=\vec{\beta}$.

Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta B}, \overrightarrow{EB}, \overrightarrow{\Gamma B}, \overrightarrow{AE}, \overrightarrow{E\Gamma}$.



Είναι

$\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Delta}$ (κοινό άκρο το Α)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta B}=\vec{\alpha}-\left(-\vec{\beta}\right)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Απάντηση

Είναι

$$\left.\begin{array}{l}\Delta E=2EB\\ \overrightarrow{\Delta E}\nearrow\!\nearrow\overrightarrow{EB}\end{array}\right\}\Leftrightarrow \overrightarrow{\Delta E}=2\overrightarrow{EB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}-\overrightarrow{A\Delta}=2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}\right)\underset{\text{στην διανυσματική σχέση}}{\overset{\text{κάναμε το ίδιο}}{\Leftrightarrow}}$$

$$3\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A\Delta}+2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow \overrightarrow{AE}=\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{3}.$$

$$\overrightarrow{EB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\vec{\alpha}-\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{3}=\frac{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}{3}$$

$$\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{AB}-\left(\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}\right)=\vec{\alpha}+\vec{\beta}-2\vec{\alpha}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$$

$$\overrightarrow{E\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}-\overrightarrow{AE}=-\vec{\beta}+2\vec{\alpha}-\frac{2\vec{\alpha}-\vec{\beta}}{3}=\frac{4\vec{\alpha}-2\vec{\beta}}{3}=\frac{2\left(2\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)}{3}$$

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Παράδειγμα 2

Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Ε της διαμέσου του ΒΔ και το σημείο Ζ του ΒΓ ώστε $Z\Gamma = 3BZ$.

i. Να αποδείξετε ότι: $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$.

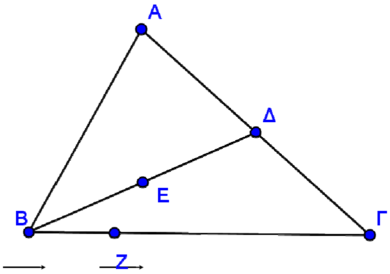
ii. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{AZ}$ ως γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{A\Gamma}$.

Απάντηση

i. Είναι

$$\overrightarrow{AE} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Delta}}{2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\overrightarrow{A\Gamma} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$$

.



ii. Έχουμε ότι $Z\Gamma = 3BZ$ και $\overrightarrow{Z\Gamma} \uparrow\uparrow \overrightarrow{BZ}$,
επομένως $\overrightarrow{Z\Gamma} = 3\overrightarrow{BZ}$.
Είναι

$$\overrightarrow{Z\Gamma} = 3\overrightarrow{BZ} \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = 3\left(\overrightarrow{AZ} - \overrightarrow{AB}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AZ} = 3\overrightarrow{AZ} - 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{A\Gamma} + 3\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{AZ} + \overrightarrow{AZ} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{A\Gamma} + 3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AZ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{A\Gamma}$$

(εδώ τα βασικά μας διανύσματα ήταν τα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Gamma}$ με επιλεγμένο σημείο αναφοράς το σταθερό σημείο-κορυφή Α).

3η Κατηγορία: Συγγραμμικά - παράλληλα διανύσματα

Για να αποδείξουμε ότι δυο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα-συγγραμμικά αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός λ τέτοιος ώστε να ισχύει $\vec{\alpha} = \lambda\cdot\vec{\beta}$. Ειδικότερα αν τα δεδομένα μας είναι μόνο με μέτρα τότε το μυαλό μας πάει στην τριγωνική ανισότητα η οποία θα δώσει και επιπλέον πληροφορία για την κατεύθυνση (ομόρροπα – αντίρροπα).

Παράδειγμα 1

Θεωρούμε τα σημεία του επιπέδου *Μ, Α, Β, Γ* για τα οποία ισχύει η ισότητα $4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 6\overrightarrow{M\Gamma}$.

α) Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$.

β) Να βρείτε τη σχετική θέση των σημείων *Α, Β, Γ* και να κατασκευάσετε ένα σχήμα.

Απάντηση

α) Είναι

$4\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=6\overrightarrow{M\Gamma}\Leftrightarrow$

$-4\overrightarrow{AM}+2\left(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AM}\right)=6\left(\overrightarrow{A\Gamma}-\overrightarrow{AM}\right)\Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{AB}-6\overrightarrow{AM}=6\overrightarrow{A\Gamma}-6\overrightarrow{AM}\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{A\Gamma}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$

β) Επειδή $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{A\Gamma}$ και Α κοινό τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά και επειδή $\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{A\Gamma}$ με $3>0$ είναι $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{A\Gamma}$. Επίσης $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\left|3\overrightarrow{A\Gamma}\right|=3\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|>\left|\overrightarrow{A\Gamma}\right|$, άρα το Γ βρίσκεται μεταξύ των Α και Β.

Παράδειγμα 2

Θεωρούμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, ένα σημείο Ο και τα διανύσματα:

$\overrightarrow{OA}=3\vec{\alpha}-2\vec{\beta},\overrightarrow{OB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta},\overrightarrow{O\Gamma}=5\vec{\alpha}+\frac{9}{2}\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Delta}=4\vec{\alpha}+5\vec{\beta}$. Να δείξετε ότι: $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Απάντηση

Είναι $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{O\Delta}-\overrightarrow{O\Gamma}=\left(4\vec{\alpha}+5\vec{\beta}\right)-\left(5\vec{\alpha}+\frac{9}{2}\vec{\beta}\right)=-\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}$

και $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\left(\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right)-\left(3\vec{\alpha}-2\vec{\beta}\right)=-2\vec{\alpha}+\vec{\beta}=2\left(-\vec{\alpha}+\frac{1}{2}\vec{\beta}\right)$

άρα $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ οπότε $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

Παράδειγμα 3

Αν $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0}$ και $\left|\vec{\alpha}\right|=\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{3}=\frac{\left|\vec{\gamma}\right|}{2}>0$ να αποδείξετε ότι :

i. $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

ii. $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$ και $\vec{\gamma}=-2\vec{\alpha}$.

Απάντηση

Έστω $\rho>0$ ώστε $\left|\vec{\alpha}\right|=\frac{\left|\vec{\beta}\right|}{3}=\frac{\left|\vec{\gamma}\right|}{2}=\rho\Leftrightarrow\begin{cases}\left|\vec{\alpha}\right|=\rho\\ \left|\vec{\beta}\right|=3\rho\\ \left|\vec{\gamma}\right|=2\rho\end{cases}$.

i. Είναι

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}+2\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\alpha}+\vec{\beta}=-2\vec{\gamma} \Rightarrow$$
$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|-2\vec{\gamma}| \Rightarrow |\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=2|\vec{\gamma}|=2\cdot 2\rho \Rightarrow$$
$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=4\rho=\rho+3\rho \Rightarrow$$
$$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Rightarrow \vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$$

ii. Από το προηγούμενο ερώτημα υπάρχει μοναδικός $\lambda>0$ τέτοιος ώστε: $\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}$ άρα και $|\vec{\beta}|=|\lambda\vec{\alpha}| \overset{\lambda>0}{=} \lambda|\vec{\alpha}| \Leftrightarrow 3\rho=\lambda\rho \overset{\rho>0}{\Leftrightarrow} \lambda=3$.
Επομένως $\vec{\beta}=3\vec{\alpha}$ και $\vec{\alpha}+3\vec{\alpha}+2\vec{\gamma}=\vec{0} \Leftrightarrow \vec{\gamma}==-2\vec{\alpha}$.

Παράδειγμα 4

Έστω $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμικά διανύσματα και $\lambda,\mu,x,y\in R$.

i. Αν $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}$ τότε $\lambda=x$ και $\mu=y$

ii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=(x+1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(x^2+4)\vec{\alpha}+(x+2)\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

Απάντηση

i. Έστω $\lambda\neq x$ τότε $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=x\vec{\alpha}+y\vec{\beta} \Rightarrow$
$$(\lambda-x)\vec{\alpha}=(y-\mu)\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}=\frac{y-\mu}{\lambda-x}\vec{\beta} \Rightarrow \vec{\alpha}//\vec{\beta} \text{ άτοπο.}$$
Άρα $\boxed{\lambda=x}$ και $\lambda\vec{\alpha}+\mu\vec{\beta}=\lambda\vec{\alpha}+y\vec{\beta} \Rightarrow (\mu-y)\vec{\beta}=\vec{0} \Rightarrow$
$\mu-y=0$ ή $\vec{\beta}=\vec{0}$ απορρίπτεται αφού $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμικά
Άρα $\boxed{\mu=y}$

ii. Επειδή $\vec{u}//\vec{v}$ πρέπει και αρκεί να υπάρχει μοναδικός αριθμός $\kappa\in R$ ώστε: $\vec{u}=\kappa\vec{v}$
Είναι
$$\vec{u}=\kappa\vec{v} \Leftrightarrow (x+1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa\left[(x^2+4)\vec{\alpha}+(x+2)\vec{\beta}\right] \Leftrightarrow$$
$$(x+1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\kappa(x^2+4)\vec{\alpha}+\kappa(x+2)\vec{\beta} \overset{(i)}{\Leftrightarrow}$$
$$\begin{cases} x+1=\kappa(x^2+4) \\ 1=\kappa(x+2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\kappa(x^2+4) \\ \dfrac{1}{x+2}=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x+1=\dfrac{1}{x+2}(x^2+4) \\ \dfrac{1}{x+2}=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=\dfrac{1}{x+2}(x^2+4) \\ \dfrac{1}{x+2}=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} 3x=2 \\ \dfrac{1}{x+2}=\kappa \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{2}{3} \\ \kappa=\dfrac{3}{8} \end{cases}$$

Επομένως $x = \frac{2}{3}$.

4η Κατηγορία: Συνευθειακά σημεία

Αποδεικνύουμε ότι δύο από τα διανύσματα που παράγονται από τα σημεία αυτά είναι παράλληλα. Για παράδειγμα αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά, αρκεί να δείξουμε ότι δυο από τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{B\Gamma}, \overrightarrow{\Gamma A}$ είναι συγγραμμικά, δηλαδή ότι: $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ ή $\overrightarrow{AB} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ ή $\overrightarrow{A\Gamma} = \lambda \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$.

Παράδειγμα 1

Αν για τα σημεία Α,Β,Γ και Ο ισχύει η σχέση $9 \cdot \overrightarrow{OA} - 7 \cdot \overrightarrow{OB} - 2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Απάντηση

<u>α τρόπος</u>

Επειδή το άθροισμα των συντελεστών αυτού του μηδενικού γραμμικού συνδυασμού των διανυσμάτων είναι $9 - 7 - 2 = 0$ στη δοσμένη ισότητα γράφουμε 9 ως $7 + 2$ και έχουμε:

$$(7+2) \cdot \overrightarrow{OA} - 7 \cdot \overrightarrow{OB} - 2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 7 \cdot \overrightarrow{OA} + 2 \cdot \overrightarrow{OA} - 7 \cdot \overrightarrow{OB} - 2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$7 \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}) + 2 \cdot (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{O\Gamma}) = \vec{0} \Leftrightarrow 7 \cdot \overrightarrow{BA} + 2 \cdot \overrightarrow{\Gamma A} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{\Gamma A} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{BA} // \overrightarrow{\Gamma A}$, και επειδή το Α είναι κοινό έπεται ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

<u>β τρόπος</u>

Θεωρούμε ένα σημείο από τα Α,Β,Γ και Ο σαν σημείο αναφοράς, έστω το Α και εργαζόμαστε με τη μέθοδο των διανυσματικών ακτίνων, οπότε:

$$9 \cdot \overrightarrow{OA} - 7 \cdot \overrightarrow{OB} - 2 \cdot \overrightarrow{O\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 9 \cdot (\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AO}) - 7 \cdot (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AO}) - 2 \cdot (\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AO}) = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$-9 \cdot \overrightarrow{AO} - 7 \cdot \overrightarrow{AB} + 7 \cdot \overrightarrow{AO} - 2 \cdot \overrightarrow{A\Gamma} + 2 \cdot \overrightarrow{AO} = \vec{0} \Leftrightarrow -7 \cdot \overrightarrow{AB} - 2 \cdot \overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{AB} = -\frac{2}{7}\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} // \overrightarrow{A\Gamma}$, και επειδή το Α είναι κοινό έπεται ότι τα σημεία Α,Β,Γ είναι συνευθειακά.

Παράδειγμα 2

Αν υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί κ,λ,μ με $|\kappa| + |\lambda| + |\mu| > 0$, τέτοιοι, ώστε $\kappa + \lambda + \mu = 0$ και $\kappa \cdot \vec{\alpha} + \lambda \cdot \vec{\beta} + \mu \cdot \vec{\gamma} = \vec{0}$, να αποδείξετε ότι τα πέρατα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$ είναι συνευθειακά.

Απάντηση

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Έστω $\kappa\cdot\vec{\alpha}+\lambda\cdot\vec{\beta}+\mu\cdot\vec{\gamma}=\vec{0}$ (1) και $\kappa+\lambda+\mu=0$ (2) με $|\kappa|+|\lambda|+|\mu|>0$ (σημαίνει ότι τουλάχιστον ένας από τους κ, λ, μ είναι διάφορος του μηδενός).
Αν Ο ένα τυχαίο σημείο αναφοράς θέτουμε $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{\gamma}$, οπότε η σχέση (1) παίρνει τη μορφή $\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+\mu\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}$ (3). Αν $\kappa\neq0$, λύνουμε τη (2) ως προς μ (ή ως λ, πάντως όχι ως προς κ) και έχουμε $\mu=-\kappa-\lambda$ και αντικαθιστώντας στην (3) έχουμε:

$$\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}+(-\kappa-\lambda)\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow\kappa\cdot\overrightarrow{OA}+\lambda\cdot\overrightarrow{OB}-\kappa\cdot\overrightarrow{O\Gamma}-\lambda\cdot\overrightarrow{O\Gamma}=\vec{0}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\kappa\cdot\left(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)+\lambda\cdot\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Gamma}\right)=\vec{0}\Leftrightarrow\kappa\cdot\overrightarrow{\Gamma A}+\lambda\cdot\overrightarrow{\Gamma B}=\vec{0}\overset{\kappa\neq0}{\Leftrightarrow}\overrightarrow{\Gamma A}=-\frac{\lambda}{\kappa}\cdot\overrightarrow{\Gamma B}\Leftrightarrow$$

τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά.

5η Κατηγορία: Ζητείται να δείξουμε ότι δύο σημεία Α και Β ταυτίζονται

Για να αποδείξουμε ότι δυο σημεία Α,Β ταυτίζονται αρκεί να δείξουμε ότι οι διανυσματικές τους ακτίνες ταυτίζονται, δηλαδή αν $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}\Leftrightarrow A\equiv B$ ή ότι το διάνυσμα που σχηματίζουν είναι το μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}=\vec{0}\Leftrightarrow A=B$.

Παράδειγμα

Θεωρούμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Μ και Ν με : $\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{A\Gamma}-3\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma N}=\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}$.

Απάντηση

Είναι

$$\overrightarrow{BM}=2\overrightarrow{A\Gamma}-3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}-\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{A\Gamma}-3\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}$$

και

$$\overrightarrow{\Gamma N}=\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}-\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}\Leftrightarrow\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{A\Gamma}-2\overrightarrow{AB}$$

Οπότε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow M\equiv N$.

6η Κατηγορία: Ζητείται να προσδιορίσουμε ένα άγνωστο σημείο Ρ που ικανοποιεί κάποια διανυσματική σχέση

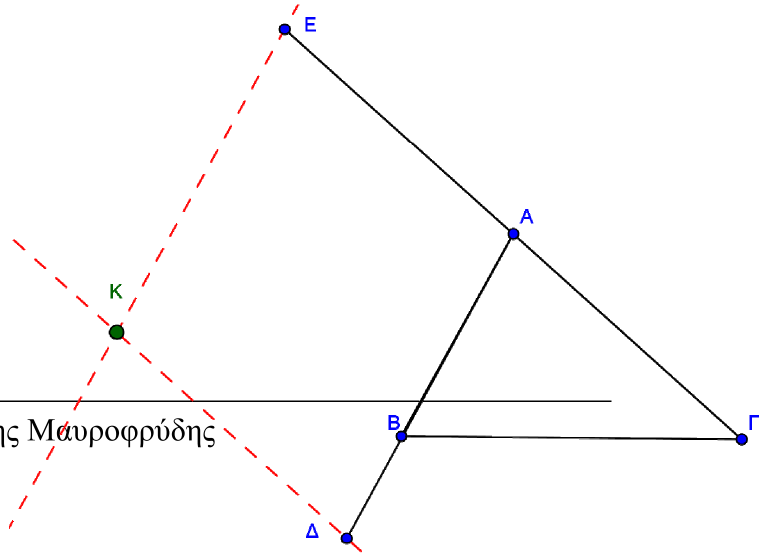
Αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα θέσης $\overrightarrow{AP}$ του Ρ όπου Α γνωστό σημείο του προβλήματος συναρτήσει γνωστών διανυσμάτων. Αυτό γίνεται συνήθως θεωρώντας ένα σημείο αναφοράς από τα δεδομένα του προβλήματος και εκφράζοντας όλα τα διανύσματα της δοσμένης σχέσης με βάση αυτό.

Παράδειγμα 1

Δίνεται τρίγωνο *ΑΒΓ*. Να προσδιορίσετε σημείο *Κ* του επιπέδου του ώστε να ισχύει η ισότητα : $\overrightarrow{AK}+3\overrightarrow{BK}-2\overrightarrow{\Gamma K}=\vec{0}$.

Απάντηση

Θεωρούμε σημείο αναφοράς το Α και έχουμε:



$\overrightarrow{AK} + 3\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB}\right) - 2\left(\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{A\Gamma}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$2\overrightarrow{AK} = 3\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{A\Gamma}$ (προσδιορίσιμο)

Παράδειγμα 2

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό σημείο Κ τέτοιο ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - 3\cdot\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$.

Απάντηση

Θεωρούμε σαν σημείο αναφοράς το σημείο Α και η σχέση μας γίνεται:

$2\cdot\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - 3\cdot\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\cdot(\overrightarrow{AA} - \overrightarrow{AK}) - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AK}) - 3\cdot(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{AK}) = \vec{0} \Leftrightarrow$

$-2\cdot\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AK} - 3\cdot\overrightarrow{A\Gamma} + 3\cdot\overrightarrow{AK} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\cdot\overrightarrow{AK} - \overrightarrow{AB} - 3\cdot\overrightarrow{A\Gamma} = \vec{0} \Leftrightarrow$

$2\cdot\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AB} + 3\cdot\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{AK} = \dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. Άρα το πέρας του διανύσματος που έχει για αρχή το σημείο Α και είναι ίσο με $\dfrac{1}{2}\cdot\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ είναι το μοναδικό σημείο Κ που επαληθεύει την ισότητα $2\cdot\overrightarrow{KA} - \overrightarrow{KB} - 3\cdot\overrightarrow{K\Gamma} = \vec{0}$.

7η Κατηγορία: Ζητείται να αποδείξουμε ότι ένα διάνυσμα είναι σταθερό ενώ περιέχει μεταβλητό σημείο Μ

Δείχνουμε, έπειτα από πράξεις, ότι η παράσταση αυτή ισούται με ένα γραμμικό συνδυασμό διανυσμάτων που ως άκρα έχουν μόνο σταθερά σημεία του προβλήματος.
Αυτό γίνεται θεωρώντας κάποιο σταθερό σημείο ως σημείο αναφοράς και εκφράζοντας όλα τα άλλα σημεία με αρχή αυτό **ή** με κατάλληλη ομαδοποίηση των διανυσμάτων (θα προδίδουν οι συντελεστές τους) και πράξεις μεταξύ τους. Σε κάθε περίπτωση το μεταβλητό σημείο απαλείφεται .

Παράδειγμα

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα τυχαίο σημείο Μ του επιπέδου του. Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 8\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

Απάντηση

Έστω $\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 8\overrightarrow{M\Gamma}$.

Είναι

$\vec{u} = 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - (3+5)\overrightarrow{M\Gamma} = 3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{M\Gamma} - 5\overrightarrow{M\Gamma} =$

$3\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{M\Gamma}\right) + 5\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{M\Gamma}\right) = 3\overrightarrow{\Gamma A} + 5\overrightarrow{\Gamma B}$ (σταθερό)

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

8η Κατηγορία: Γεωμετρικοί τόποι

Θυμόμαστε (;;;;;) από την γεωμετρία της α λυκείου ότι:

Γεωμετρικός τόπος είναι το σύνολο σημείων του επιπέδου (αφού δουλεύουμε σε δύο διαστάσεις) που έχουν μια κοινή χαρακτηριστική ιδιότητα και μόνον αυτά την έχουν.

Βασικοί Γεωμετρικοί τόποι

α. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{AB}$, όπου Α,Β σταθερά σημεία είναι η ευθεία ΑΒ.

β. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\kappa\cdot\overrightarrow{MA}+\lambda\cdot\overrightarrow{MB}=\vec{0}$, όπου Α,Β σταθερά σημεία και κ,λ πραγματικοί αριθμοί με $\kappa+\lambda\neq 0$, είναι η ευθεία ΑΒ.

γ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία ισαπέχουν από δυο σταθερά σημεία Α και Β, δηλαδή για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{MA}|=|\overrightarrow{MB}|$, είναι η μεσοκάθετος του ΑΒ.

δ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου τα οποία απέχουν σταθερή απόσταση από ένα σταθερό σημείο, δηλαδή για τα οποία ισχύει $|\overrightarrow{OM}|=\rho$, $\rho>0$, είναι ο κύκλος με κέντρο το σημείο Ο και ακτίνας ρ.

ε. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει $\overrightarrow{AM}//\overrightarrow{B\Gamma}$, όπου Α,Β,Γ σταθερά σημεία είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Α και είναι παράλληλη προς την ΒΓ.

στ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ο λόγος των αποστάσεών τους από δυο σταθερά σημεία Α και Β είναι σταθερός, δηλαδή ισχύει ότι $\dfrac{|\overrightarrow{MA}|}{|\overrightarrow{MB}|}=\lambda$, με $\lambda>0$, είναι απολλώνειος κύκλος.

ζ. Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}|=|\kappa\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\lambda\cdot\overrightarrow{M\Delta}|$ (1), όπου Α,Β,Γ,Δ σταθερά σημεία του επιπέδου και $\alpha,\beta,\kappa,\lambda$ κατάλληλοι πραγματικοί αριθμοί, αντιμετωπίζεται ως εξής:

α. Βρίσκουμε τα σταθερά σημεία Ρ και Σ για τα οποία ισχύουν: $\alpha\cdot\overrightarrow{MA}+\beta\cdot\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MP}$ και $\kappa\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+\lambda\cdot\overrightarrow{M\Delta}=(\kappa+\lambda)\cdot\overrightarrow{M\Sigma}$.

β. Στη συνέχεια μετασχηματίζουμε τη σχέση (1) και έχουμε:

$$|(\alpha+\beta)\cdot\overrightarrow{MP}|=|(\kappa+\lambda)\cdot\overrightarrow{M\Sigma}|\Leftrightarrow\frac{|\overrightarrow{MP}|}{|\overrightarrow{M\Sigma}|}=\frac{|\kappa+\lambda|}{|\alpha+\beta|}=\rho.$$

γ. i. Αν $\rho=1$ τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος ΡΣ

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

ii. Αν $\rho \neq 1$ τότε ο γεωμετρικός τόπος είναι ένας Απολλώνειος κύκλος.

Παράδειγμα

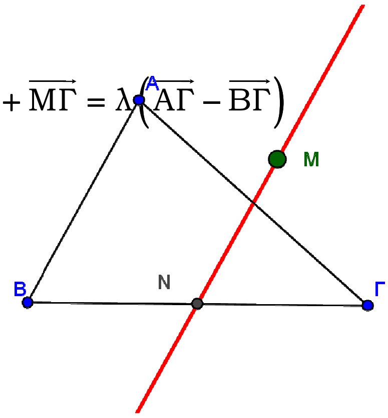
Θεωρούμε τρίγωνο *ΑΒΓ*. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων *Μ* του επιπέδου του για τα οποία ισχύει η ισότητα:

$$\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma M} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} \text{ , όπου } \lambda \in R \text{ .}$$

Απάντηση

Είναι

$$\overrightarrow{MB} + \lambda\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{\Gamma M} + \lambda\overrightarrow{A\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{\Gamma M} = \lambda\overrightarrow{A\Gamma} - \lambda\overrightarrow{B\Gamma} \Leftrightarrow \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{M\Gamma} = \lambda\left(\overrightarrow{A\Gamma} - \overrightarrow{B\Gamma}\right)$$



θεωρούμε το μέσο Ν του ΒΓ και ισοδύναμα έχουμε:

$$2\overrightarrow{MN} = \lambda\left(\overrightarrow{A\Gamma} + \overrightarrow{\Gamma B}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} = \frac{\lambda}{2}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MN} // \overrightarrow{AB}$$

άρα ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ είναι η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο Ν και είναι παράλληλη προς την ΑΒ.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ασκήσεις

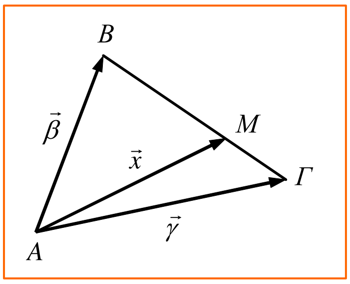
Ομάδα Α

1. Αν $\vec{\alpha}$ είναι ένα διάνυσμα, τι μπορείτε να πείτε για το μέτρο και την κατεύθυνση του διανύσματος $\vec{\alpha}_0 = \frac{1}{|\vec{\alpha}|}\cdot\vec{\alpha}$;

2. Να βρείτε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθεμιά από τις περιπτώσεις:

(i) $\frac{1}{2}\cdot(\vec{x}+\vec{\alpha}) = \frac{1}{3}\cdot(\vec{x}+\vec{\beta})$ (ii) $\vec{x}+3\cdot(\vec{\alpha}+\vec{\beta}) = 4\cdot(\vec{\alpha}-\vec{\beta})-3\vec{x}$.

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $(\mathrm{BM}) = 2(\mathrm{M\Gamma})$, να αποδείξετε ότι $\vec{x} = \frac{1}{3}(\vec{\beta}+2\vec{\gamma})$.

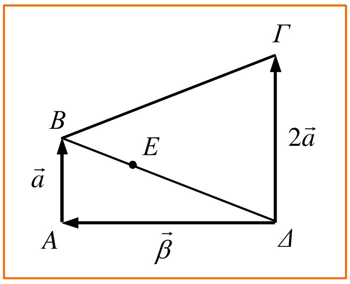


4. Στο διπλανό σχήμα έχουμε:

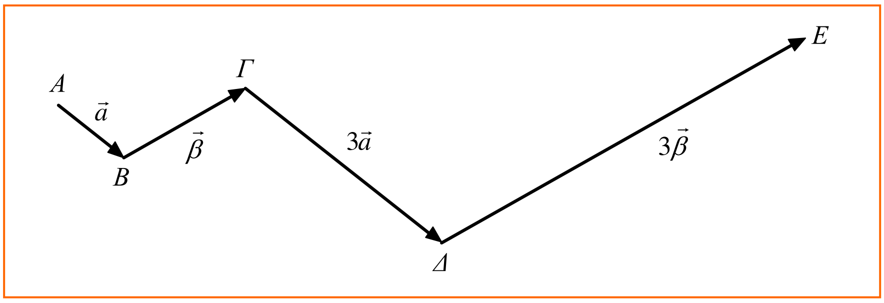
$\Delta\mathrm{E} = 2\mathrm{EB}$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{\Delta\Gamma} = 2\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{\Delta\mathrm{A}} = \vec{\beta}$.

i. Να εκφράσετε συναρτήσει των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ τα διανύσματα $\overrightarrow{\Delta\mathrm{B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{EB}}$, $\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}}$.

ii. Από τις εκφράσεις των $\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ και $\overrightarrow{\mathrm{E\Gamma}}$ ποιο συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία A, E και Γ;



5. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι τα σημεία Α, Γ και Ε είναι συνευθειακά.



6. Αν $\overrightarrow{\mathrm{AK}}+3\overrightarrow{\mathrm{BK}}-2\overrightarrow{\mathrm{BA}} = \overrightarrow{\mathrm{B\Lambda}}+3\overrightarrow{\mathrm{AM}}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ, Λ και Μ είναι συνευθειακά.

7. Αν $Α\Delta$, $ΒΕ$ και $ΓΖ$ είναι διάμεσοι τριγώνου $ΑΒΓ$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{Α\Delta}+\overrightarrow{ΒΕ}+\overrightarrow{ΓΖ}=\vec{0}$.

8. Αν $Κ$, $Λ$, $Μ$ είναι τα μέσα των πλευρών $ΒΓ$, $ΓΑ$, $ΑΒ$, αντιστοίχως, τριγώνου $ΑΒΓ$, να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο $Ο$ ισχύει: $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}=\overrightarrow{ΟΚ}+\overrightarrow{ΟΛ}+\overrightarrow{ΟΜ}$.

9. Δίνεται το μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και σημείο $Γ$ τέτοιο ώστε να ισχύει $\overrightarrow{ΑΓ}=\lambda\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}=\mu\overrightarrow{ΑΒ}$. Να αποδείξετε ότι $\lambda-\mu=1$.

10. Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$. Αν $\overrightarrow{Α\Delta}=\kappa\overrightarrow{ΑΒ}+\lambda\overrightarrow{ΑΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΕ}=\lambda\overrightarrow{ΑΒ}+\kappa\overrightarrow{ΑΓ}\cdot$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{\Delta Ε}//\overrightarrow{ΒΓ}$.

11. Έστω $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ δύο μη συγγραμμικά διανύσματα.

i. Αν $x\vec{\alpha}+y\vec{\beta}=\vec{0}$, να δείξετε ότι $x=y=0$.

ii. Αν $x_1\vec{\alpha}+y_1\vec{\beta}=x_2\vec{\alpha}+y_2\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $x_1=x_2$ και $y_1=y_2$.

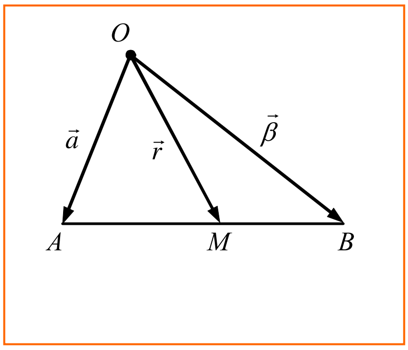
iii. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x\in R$ τα διανύσματα $\vec{u}=(x-1)\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ και $\vec{v}=(2+3x)\vec{\alpha}-2\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά.

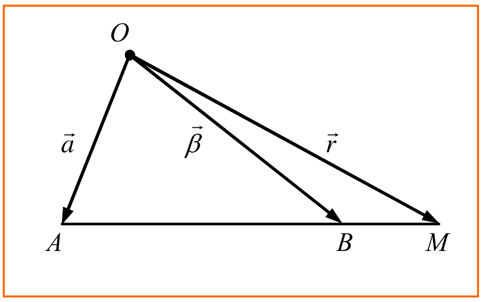
12. Θεωρούμε ένα παραλληλόγραμμο $ΑΒΓ\Delta$ και τα σημεία $Ε$ και $Ζ$, ώστε $\overrightarrow{ΑΕ}=\kappa\overrightarrow{Α\Delta}$ και $\overrightarrow{ΑΖ}=\lambda\overrightarrow{ΑΒ}$ με $\kappa\lambda\neq 0$. Αν $\frac{1}{\kappa}+\frac{1}{\lambda}=1$, να αποδείξετε ότι τα σημεία $Ε$, $Γ$ και $Ζ$ είναι συνευθειακά.

13. Να αποδείξετε ότι αν ισχύουν δύο από τις σχέσεις $x\overrightarrow{ΚΑ}+y\overrightarrow{ΚΒ}+z\overrightarrow{ΚΓ}=\vec{0}$, $x\overrightarrow{ΛΑ}+y\overrightarrow{ΛΒ}+z\overrightarrow{ΛΓ}=\vec{0}$, $x+y+z=0$, τότε θα ισχύει και η τρίτη (το σημείο $Κ$ είναι διαφορετικό από το $Λ$).

14. Αν $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ και $\vec{r}$ είναι οι διανυσματικές ακτίνες των σημείων $Α$, $Β$ και $Μ$ αντιστοίχως και $\frac{ΜΑ}{ΜΒ}=\frac{\kappa}{\lambda}$, να αποδείξετε ότι αν το $Μ$ είναι εσωτερικό του $ΑΒ$, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}+\kappa\vec{\beta}}{\lambda+\kappa}$, ενώ αν το $Μ$ είναι εξωτερικό του $ΑΒ$, τότε $\vec{r}=\frac{\lambda\vec{\alpha}-\kappa\vec{\beta}}{\lambda-\kappa}$.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα



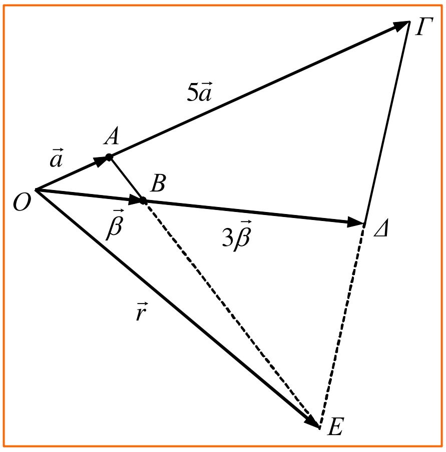


15. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ένα σημείο Σ. Βρίσκουμε τα συμμετρικά Δ, Ε και Ζ του Σ ως προς τα μέσα Κ, Λ και Μ των πλευρών ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντιστοίχως. Αν G και G′ τα βαρύκεντρα των τριγώνων ΑΒΓ και ΔΕΖ, να αποδείξετε ότι τα σημεία Σ, G και G′ είναι συνευθειακά.

16. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Μ και Ν τα μέσα των διαγωνίων του ΑΓ και ΒΔ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι αν $4\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{A\Delta} - \overrightarrow{B\Gamma}$, τότε το τετράπλευρο αυτό είναι παραλληλόγραμμο.

17. Δίνονται τα σημεία Α,Β και Γ. Να αποδείξετε ότι για οποιοδήποτε σημείο Μ το διάνυσμα $3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό.

18. Τα σημεία Α,Β,Γ και Δ ενός επιπέδου έχουν διανύσματα θέσεως $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$, $5\vec{\alpha}$ και $3\vec{\beta}$ αντιστοίχως, όπου τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι μη συγγραμμικά. Να βρείτε το διάνυσμα θέσεως $\vec{r}$ του σημείου τομής των ευθειών ΑΒ και ΓΔ.



1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

Ομάδα Β

1. Αν $ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ$ οι διάμεσοι ενός τριγώνου $ΑΒΓ$, δείξτε ότι:
   i. $\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΒΕ}+\overrightarrow{ΓΖ}=\vec{0}$.
   ii. Αν $Σ$ τυχαίο σημείο του επιπέδου τότε $\overrightarrow{ΣΑ}+\overrightarrow{ΣΒ}+\overrightarrow{ΣΓ}=\overrightarrow{ΣΔ}+\overrightarrow{ΣΕ}+\overrightarrow{ΣΖ}$.
2. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$. Αν $Μ$ μέσο της $ΒΓ$ και $Θ$ το κέντρο βάρους του $ΑΒΓ$, δηλαδή ισχύει $\overrightarrow{ΑΘ}=2\cdot\overrightarrow{ΘΜ}$, να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{ΒΑ}+\overrightarrow{ΒΓ}=3\cdot\overrightarrow{ΒΘ}$.
3. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$. Αν για τα σημεία $Δ, Ε$ του επιπέδου του ισχύει ότι $\overrightarrow{ΑΒ}+\overrightarrow{ΑΓ}=\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΑΕ}$, να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα $ΒΓ$ και $ΔΕ$ έχουν κοινό μέσο.
4. Έστω κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και $Μ, Ν$ τα μέσα των πλευρών του $ΑΒ, ΓΔ$ αντίστοιχα. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{ΑΔ}+\overrightarrow{ΒΓ}=2\cdot\overrightarrow{ΜΝ}$.
5. Έστω κυρτό τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ και $Μ$ το μέσο της διαγωνίου του $ΑΓ$. Αποδείξτε ότι:
   i. $\overrightarrow{ΜΒ}+\overrightarrow{ΜΔ}=\overrightarrow{ΓΔ}-\overrightarrow{ΒΑ}$, ii. $\overrightarrow{ΜΒ}-\overrightarrow{ΜΔ}=\overrightarrow{ΓΒ}-\overrightarrow{ΓΔ}$.
6. Έστω κύκλος με κέντρο το σημείο Ο. Αν $ΑΒ$ και $ΓΔ$ δυο κάθετες χορδές του κύκλου οι οποίες τέμνονται στο σημείο $Σ$, να αποδείξετε ότι:
   i. $\overrightarrow{ΟΑ}+\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}+\overrightarrow{ΟΔ}=2\cdot\overrightarrow{ΟΣ}$, ii. $\overrightarrow{ΟΑ}-\overrightarrow{ΟΒ}+\overrightarrow{ΟΓ}-\overrightarrow{ΟΔ}=\overrightarrow{ΒΓ}+\overrightarrow{ΔΑ}$.
7. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ του επιπέδου του για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{ΑΔ}=\overrightarrow{ΓΒ}$, $\overrightarrow{ΒΕ}=\overrightarrow{ΒΑ}+\overrightarrow{ΒΓ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ}=\overrightarrow{ΒΑ}-\overrightarrow{ΒΓ}$.
   i. Να προσδιορισθούν τα σημεία $Δ, Ε, Ζ$ και να κάνετε το σχήμα.
   ii. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ΔΖΕΓ$ είναι παραλληλόγραμμο.
8. **(Βασική άσκηση)** Έστω τα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ του επιπέδου. Αποδείξτε ότι το τυχαίο διάνυσμα $\vec{x}$ του επιπέδου γράφεται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\vec{α}$ και $\vec{β}$, δηλαδή αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικοί πραγματικοί αριθμοί $λ$ και $μ$ για τους οποίους ισχύει $\vec{x}=λ\cdot\vec{α}+μ\cdot\vec{β}$.
9. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε, Ζ$ τα οποία προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{ΑΕ}=\overrightarrow{ΖΓ}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$.
   i. Ερμηνεύστε γιατί τα σημεία $Ε, Ζ$ είναι σημεία εσωτερικά της διαγωνίου $ΑΓ$.
   ii. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$.
   iii. Εξηγείστε γιατί τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ εκφράζονται κατά μοναδικό τρόπο σαν γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΒΓ}$.
   iv. Αποδείξτε ότι $\overrightarrow{ΔΕ}+\overrightarrow{ΔΖ}=\overrightarrow{ΔΒ}$.
   v. Αποδείξτε ότι το τετράπλευρο $ΕΒΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.
10. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και τα σημεία $Δ, Ε$ της πλευράς του $ΒΓ$ για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{ΒΔ}=\overrightarrow{ΔΕ}=\overrightarrow{ΕΓ}$. Αποδείξτε ότι:

i. $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, ii. $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$,

iii. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$.

11. Έστω Α,Β,Γ,Δ σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $\left|2\cdot\overrightarrow{MA}+5\cdot\overrightarrow{MB}\right|=\left|3\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+4\cdot\overrightarrow{M\Delta}\right|$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

i. Βρείτε σημείο Ε της ΑΒ ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{MA}+5\cdot\overrightarrow{MB}=7\cdot\overrightarrow{ME}$.

ii. Βρείτε σημείο Θ της ΓΔ ώστε να ισχύει $3\cdot\overrightarrow{M\Gamma}+4\cdot\overrightarrow{M\Delta}=7\cdot\overrightarrow{M\Theta}$.

iii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

12. Έστω Α,Β σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $\left|5\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}\right|=16$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου.

i. Βρείτε σημείο Κ της ΑΒ ώστε να ισχύει $5\cdot\overrightarrow{MA}+3\cdot\overrightarrow{MB}=8\cdot\overrightarrow{MK}$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

13. Έστω Α,Β σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $2\cdot\overrightarrow{MA}+4\cdot\overrightarrow{MB}=6\cdot\vec{\alpha}$, όπου Μ μεταβλητό σημείο του επιπέδου και $\vec{\alpha}$ γνωστό διάνυσμα .

i. Βρείτε σημείο Κ της ΑΒ ώστε να ισχύει $2\cdot\overrightarrow{MA}+4\cdot\overrightarrow{MB}=6\cdot\overrightarrow{MK}$.

ii. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ.

14. Έστω A,B,Γ,M σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $4\cdot\overrightarrow{MA}+9\cdot\overrightarrow{MB}=13\cdot\overrightarrow{M\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

15. Έστω A,B,K,Λ,M σταθερά σημεία του επιπέδου, ανά δύο διαφορετικά για τα οποία ισχύει η σχέση $2\cdot\overrightarrow{A\Lambda}+3\cdot\overrightarrow{B\Lambda}+2\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{AK}+\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BK}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία K,Λ,M είναι συνευθειακά.

16. Έστω τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ καθώς και τα σημεία A,B,Γ με αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\overline{OA}=\vec{\alpha}+3\vec{\beta}$, $\overline{OB}=2\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ και $\overline{O\Gamma}=3\vec{\alpha}-5\vec{\beta}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία A,B,Γ είναι συνευθειακά.

17. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ,E για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{A\Delta}=\kappa\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{BE}=\lambda\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$ με $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ και $\kappa\cdot\lambda=1$. Αποδείξτε ότι:

i. $\kappa\neq0$ και $\kappa\neq0$, ii. Τα σημεία Δ,Γ,E είναι συνευθειακά.

18. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα σημεία Δ,E,Z για τα οποία ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{B\Delta}=\frac{1}{3}\cdot\overrightarrow{B\Gamma}$, $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{E\Delta}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{4}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$. Αποδείξτε ότι:

i. $2\cdot\overrightarrow{BZ}+3\cdot\overrightarrow{EB}=\vec{0}$, ii. Τα σημεία B,E,Z είναι συνευθειακά.

19. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AM η διάμεσός του. Αν για τα σημεία Δ,E,Z ισχύουν οι σχέσεις: $\overrightarrow{A\Delta}=\frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AE}=\frac{4}{7}\cdot\overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ}=\frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{A\Gamma}$, αποδείξτε ότι τα σημεία Δ,E,Z είναι συνευθειακά.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

20. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$ και τα σημεία $Ε,Ζ$ τα οποία προσδιορίζονται από τις σχέσεις $\overrightarrow{ΑΕ}=\frac{1}{7}\cdot\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΖ}=\frac{1}{8}\cdot\overrightarrow{ΑΓ}$.

i. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\overrightarrow{ΔΕ}$ και $\overrightarrow{ΔΖ}$ σαν γραμμικό συνδυασμό των διανυσμάτων $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΑΔ}$.

ii. Αποδείξτε ότι τα σημεία $Δ,Ε,Ζ$ είναι συνευθειακά.

21. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$, $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ καθώς και τα σημεία $Α,Β,Γ$ με αντίστοιχες διανυσματικές ακτίνες $\overrightarrow{ΟΑ}=\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}$, $\overrightarrow{ΟΒ}=5\vec{α}+3\vec{β}+4\vec{γ}$ και $\overrightarrow{ΟΓ}=13\vec{α}+7\vec{β}+10\vec{γ}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $Α,Β,Γ$ είναι συνευθειακά.

22. Έστω τα μη μηδενικά και μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$.

i. Αν ισχύει $κ\cdot\vec{α}+λ\cdot\vec{β}=\vec{0}$, με $κ,λ\in\mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $κ=λ=0$.

ii. Αποδείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=2\cdot\vec{α}-\vec{β}$ και $\vec{w}=\vec{α}-3\cdot\vec{β}$ είναι επίσης μη συγγραμμικά.

23. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$, για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{α}|=x$, $|\vec{β}|=3x-4$ και $|\vec{α}+\vec{β}|=x^2$, με $x\in\mathbb{R}$.

i. Βρείτε το $x\in\mathbb{R}$.

ii. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

24. Έστω τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$, για τα οποία ισχύουν ότι $|\vec{β}|=(ν+1)|\vec{α}|$ και $|\vec{α}+\vec{β}|=ν|\vec{α}|$ $ν\in\mathbb{N}^*$. Δείξτε ότι τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι αντίρροπα.

25. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{α}-\vec{β}|=2|\vec{β}-\vec{γ}|=4|\vec{γ}-\vec{α}|$. Δείξτε ότι $\vec{α}=\vec{β}=\vec{γ}$.

26. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύουν ότι $\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}=\vec{0}$, $|\vec{β}|=λ|\vec{α}|$ και $|\vec{γ}|=(λ+1)|\vec{α}|$ με $λ>0$. Δείξτε ότι:

i. Τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

ii. Τα διανύσματα $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ είναι αντίρροπα.

27. Έστω τα διανύσματα $\vec{α},\vec{β},\vec{γ}$ για τα οποία ισχύουν ότι $\vec{α}+\vec{β}+\vec{γ}=\vec{0}$ και $\frac{|\vec{α}|}{3}=\frac{|\vec{β}|}{4}=\frac{|\vec{γ}|}{7}$. Δείξτε ότι:

i. Τα διανύσματα $\vec{α}$ και $\vec{β}$ είναι ομόρροπα.

ii. Τα διανύσματα $\vec{β}$ και $\vec{γ}$ είναι αντίρροπα.

28. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και το τυχαίο σημείο $Μ$ του επιπέδου του. Αποδείξτε ότι το διάνυσμα $\vec{δ}=2\cdot\overrightarrow{ΜΑ}+3\cdot\overrightarrow{ΜΓ}+5\cdot\overrightarrow{ΒΜ}$ είναι σταθερό.

29. Έστω παραλληλόγραμμο $ΑΒΓΔ$. Βρείτε σημείο $Ρ$ του επιπέδου του αν ισχύει ότι $\overrightarrow{ΡΑ}+\overrightarrow{ΡΒ}+\overrightarrow{ΡΓ}=\overrightarrow{ΡΔ}$.

1.3 Πολλαπλασιασμός αριθμού με διάνυσμα

30. Εάν $|\vec{a}+2\vec{b}|=1, |-3\vec{a}+\vec{b}|=1$, να δείξετε ότι $\frac{3}{7}\leq|\vec{a}+\vec{b}|\leq\frac{5}{7}$.