1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Ο μαθητής πρέπει:

- να προσθέτει δύο διανύσματα κάνοντας τα διαδοχικά ή να χρησιμοποιεί τον κανόνα του παραλληλογράμμου και να σχεδιάζει το άθροισμα
- να γνωρίζει τις ιδιότητες της πρόσθεσης διανυσμάτων και το ουδέτερο στοιχείο της
- να γνωρίζει πως προσθέτουμε παραπάνω από δύο διανύσματα και να σχεδιάζει το άθροισμα
- να γνωρίζει την διαφορά δύο διανυσμάτων και να την σχεδιάζει
- να γνωρίζει πως εκφράζονται οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου που παράγονται από δύο δοσμένα μη συγγραμμικά διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$
- να γνωρίζει τις έννοιες : σημείο αναφοράς, διάνυσμα θέσης - διανυσματική ακτίνα
- να γράφει οποιοδήποτε διάνυσμα χρειαστεί ως διαφορά δύο διανυσμάτων με σημείο αναφοράς δικής του επιλογής ή ως άθροισμα διαδοχικών διανυσμάτων
- να γνωρίζει την τριγωνική ανισότητα για δύο μη συγγραμμικά διανύσματα και την γενίκευση της
- να γνωρίζει τα συμπεράσματα των σχέσεων $\left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|, \left|\vec{\alpha}+\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|$, $\left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\left|\vec{\alpha}\right|+\left|\vec{\beta}\right|, \left|\vec{\alpha}-\vec{\beta}\right|=\left|\left|\vec{\alpha}\right|-\left|\vec{\beta}\right|\right|$
- να χρησιμοποιεί τα παραπάνω σε αποδεικτικές ασκήσεις

- **Πρόσθεση Διανυσμάτων**

Α. Ορισμός της πρόσθεσης δυο διανυσμάτων

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το Α παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$ λέγεται **άθροισμα** ή **συνισταμένη** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και συμβολίζεται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

Θέμα 1ο

Έστω δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και τυχαίο σημείο Ο. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητο της επιλογής του σημείου *O*. *Περιγράψτε τον κανόνα παραλληλογράμμου.*

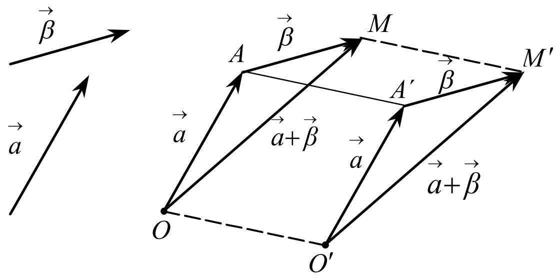
Απάντηση

Με αρχή ένα σημείο *O* παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και στη συνέχεια με αρχή το *A* παίρνουμε διάνυσμα $\overrightarrow{AM}=\vec{\beta}$. Έστω O' είναι ένα άλλο σημείο και πάρουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{A'M'}=\vec{\beta}$, επειδή $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{O'A'}=\vec{\alpha}$ και

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

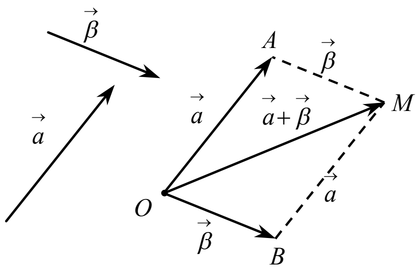
1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

$\vec{AM}=\vec{A'M'}=\vec{\beta}$, έχουμε $\vec{OO'}=\vec{AA'}$ και $\vec{AA'}=\vec{MM'}$. Επομένως, $\vec{OO'}=\vec{MM'}$, που συνεπάγεται ότι και $\vec{OM}=\vec{O'M'}$.



Περιγραφή του κανόνα παραλληλογράμμου

Το άθροισμα δύο διανυσμάτων βρίσκεται και με το λεγόμενο *κανόνα του παραλληλόγραμμου*. Δηλαδή, αν με αρχή ένα σημείο O πάρουμε τα διανύσματα $\vec{OA}=\vec{\alpha}$ και $\vec{OB}=\vec{\beta}$, τότε το άθροισμα $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ ορίζεται από τη διαγώνιο OM του παραλληλόγραμμου που έχει προσκείμενες πλευρές τις OA και OB.



■

- **Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων**

Για την πρόσθεση των διανυσμάτων ισχύουν οι γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πραγματικών αριθμών. Δηλαδή, αν $\vec{\alpha},\vec{\beta},\vec{\gamma}$ είναι τρία διανύσματα, τότε:

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική **ιδιότητα**)

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική **ιδιότητα**)

(3) $\vec{\alpha}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{\alpha}=\vec{\alpha}$ (**Ουδέτερο** στοιχείο της πρόσθεσης το $\vec{0}$)

(4) $\vec{\alpha}+(-\vec{\alpha})=(-\vec{\alpha})+\vec{\alpha}=\vec{0}$. (**Αντίθετα** διανύσματα έχουν άθροισμα $\vec{0}$)

Θέμα 2ο

Αποδείξτε τις επόμενες ιδιότητες για το άθροισμα διανυσμάτων :

(1) $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)

(2) $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ (Προσεταιριστική ιδιότητα)

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

Απόδειξη

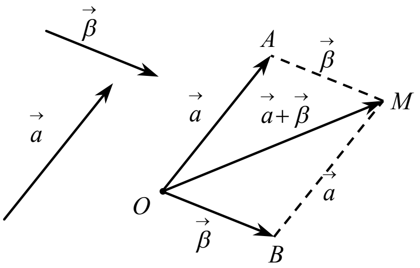
- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$$\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{OA}+\vec{AM}=\vec{OM}$$

και

$$\vec{\beta}+\vec{\alpha}=\vec{OB}+\vec{BM}=\vec{OM}\ .$$

Επομένως, $\vec{\alpha}+\vec{\beta}=\vec{\beta}+\vec{\alpha}$.

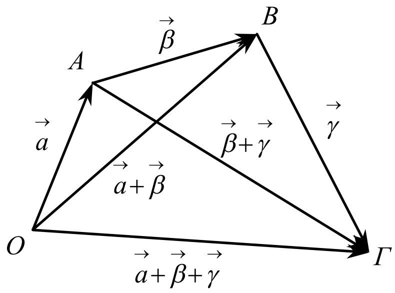


- Από το διπλανό σχήμα έχουμε:

$(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=(\vec{OA}+\vec{AB})+\vec{B\Gamma}=\vec{OB}+\vec{B\Gamma}=\vec{O\Gamma}$ και

$\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})=\vec{OA}+(\vec{AB}+\vec{B\Gamma})=\vec{OA}+\vec{A\Gamma}=\vec{O\Gamma}$.

Επομένως, $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}=\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$

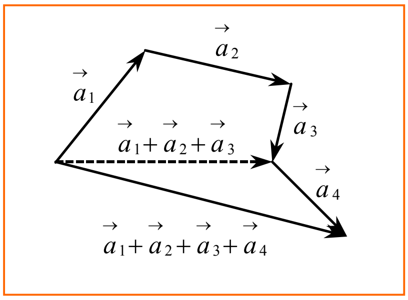


■

- Η προσεταιριστική ιδιότητα μας επιτρέπει να συμβολίζουμε καθένα από τα ίσα αθροίσματα $(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}$ και $\vec{\alpha}+(\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$, το οποίο θα λέμε άθροισμα των τριών διανυσμάτων $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ και $\vec{\gamma}$.
- Το άθροισμα περισσότερων διανυσμάτων $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\ldots,\vec{\alpha}_\nu$, $\nu\geq 3$ ορίζεται επαγωγικά ως εξής: $\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\ldots+\vec{\alpha}_\nu=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\ldots+\vec{\alpha}_{\nu-1})+\vec{\alpha}_\nu$.

Για παράδειγμα,

$\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\vec{\alpha}_4=(\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3)+\vec{\alpha}_4$



📖 **Πρόσεξε** ότι για να προσθέσουμε ν διανύσματα $\vec{\alpha}_1,\vec{\alpha}_2,\vec{\alpha}_3,\ldots,\vec{\alpha}_\nu$, τα καθιστούμε διαδοχικά, οπότε το άθροισμά τους θα είναι το διάνυσμα που έχει ως αρχή την αρχή του πρώτου και ως πέρας το πέρας του τελευταίου. Επειδή μάλιστα ισχύουν η αντιμεταθετική και η προσεταιριστική ιδιότητα της πρόσθεσης, το άθροισμα δε μεταβάλλεται αν αλλάξει η σειρά των προσθετέων ή αν μερικοί από αυτούς αντικατασταθούν με το άθροισμά τους.

📖 **Πρόσεξε** ότι για τρία τυχαία σημεία A,B,Γ ισχύει η σχέση του Chasles $\vec{AB}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$. (Η σχέση του Chasles ισχύει και για ν τυχαία σημεία)

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

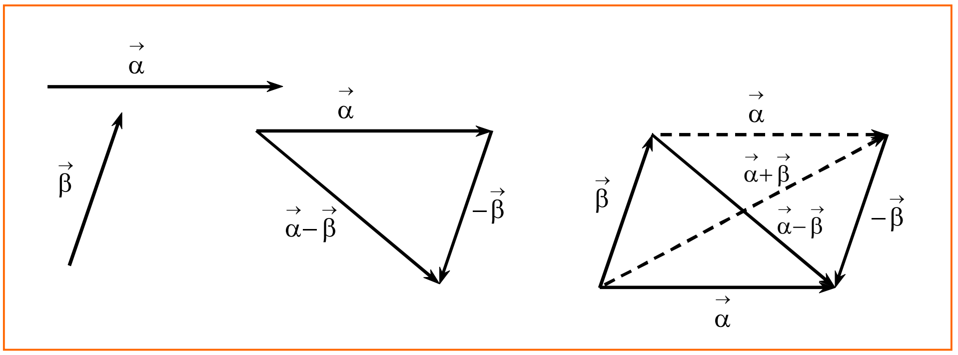
1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

🕮 **Πρόσεξε** ότι κάθε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ μπορεί να γραφεί ως άθροισμα δυο ή περισσοτέρων διανυσμάτων!
Για παράδειγμα $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB}$ ή $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NB}$.

🕮 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$ τότε τα διανύσματα $\overrightarrow{MA}$ και $\overrightarrow{MB}$ είναι αντίθετα, δηλαδή ισχύει η ισοδυναμία $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}=-\overrightarrow{MB}$. Ταυτόχρονα το σημείο Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ!

- **Αφαίρεση Διανυσμάτων**

Η **διαφορά** $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$ του διανύσματος $\vec{\beta}$ από το διάνυσμα $\vec{\alpha}$ **ορίζεται ως άθροισμα** των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $-\vec{\beta}$. Δηλαδή $\vec{\alpha}-\vec{\beta}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})$.



Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν έχουμε δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, τότε υπάρχει μοναδικό διάνυσμα $\vec{x}$, τέτοιο, ώστε $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$. Πράγματι, $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}\Leftrightarrow\Leftrightarrow(-\vec{\beta})+(\vec{\beta}+\vec{x})=(-\vec{\beta})+\vec{\alpha}\Leftrightarrow\vec{0}+\vec{x}=\vec{\alpha}+(-\vec{\beta})\Leftrightarrow\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

🕮 **Πρόσεξε λοιπόν** ότι η εξίσωση $\vec{\beta}+\vec{x}=\vec{\alpha}$ έχει μοναδική λύση $\vec{x}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

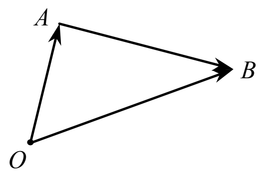
🕮 **Πρόσεξε** ότι οι ιδιότητες της πρόσθεσης δεν ισχύουν για την αφαίρεση.

- **Διάνυσμα Θέσης ή Διανυσματική Ακτίνα**

Θέμα 3ο
Τι ονομάζουμε διάνυσμα θέσεως σημείου Α ή διανυσματική ακτίνα του Α.
Αποδείξτε ότι: Κάθε διάνυσμα στον χώρο είναι ίσο με την διανυσματική ακτίνα τους πέρατος μείον την διανυσματική ακτίνα της αρχής.

Απάντηση

Έστω O ένα **σταθερό** σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο M του χώρου ορίζεται το διάνυσμα $\overrightarrow{OM}$, το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του** M ή **διανυσματική ακτίνα του** M.



Αν O είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχουμε $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ και επομένως

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

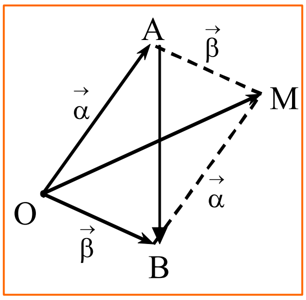
1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

$\boxed{\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}}$ ■

📖 **Πρόσεξε** ότι παραπάνω, το σταθερό σημείο O επιλέχθηκε ως η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου και λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

📖 **Πρόσεξε** ότι «Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατός του μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής του».

📖 **Πρόσεξε τα εξής!**



$\vec{OM}=\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{\alpha}+\vec{\beta}$, $\quad \vec{BA}=\vec{OA}-\vec{OB}=\vec{\alpha}-\vec{\beta}$

και $\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=\vec{\beta}-\vec{\alpha}$. Οπότε από τον κανόνα του παραλληλογράμμου για την διανυσματική πρόσθεση συμπεραίνουμε τα εξής:

1. Η διαγώνιος με αρχή το O, δηλαδή το $\vec{OM}$ εκφράζει το $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$.

2. Η διαγώνιος με αρχή το A, δηλαδή το $\vec{AB}$ εκφράζει το $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$

3. Η διαγώνιος με αρχή το B, δηλαδή το $\vec{BA}$ εκφράζει το $\vec{\alpha}-\vec{\beta}$.

📖 **Πρόσεξε τα εξής!**

$|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{OM}|=|\vec{MO}|$

$|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|=|\vec{\beta}-\vec{\alpha}|=|\vec{AB}|=|\vec{BA}|$

- **Μέτρο αθροίσματος διανυσμάτων (τριγωνική ανισότητα)**

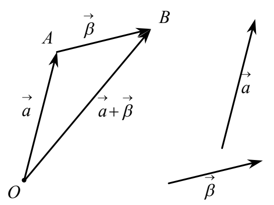
Θέμα 4ο

Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει:

$$\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big| \le |\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$$

Απόδειξη

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι



$$|(OA)-(AB)|\le(OB)\le(OA)+(AB)$$

και επομένως

$$\boxed{\big||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\big|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|}$$

■

📖 **Πρόσεξε τα εξής!**

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

Ισχύει ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$

Ισχύει ότι $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}| \Leftrightarrow \vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$

📖 **Πρόσεξε ότι** $|\vec{\alpha}_1+\vec{\alpha}_2+\vec{\alpha}_3+\ldots+\vec{\alpha}_\nu| \le |\vec{\alpha}_1|+|\vec{\alpha}_2|+|\vec{\alpha}_3|+\ldots+|\vec{\alpha}_\nu|$

📖 **Πρόσεξε ότι** $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right| \le |\vec{\alpha}-\vec{\beta}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

Θέματα προς εμπέδωση

1. Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}=\overrightarrow{A\Gamma}$, τότε τα σημεία Α, Β, Γ είναι συνευθειακά. **Σ** **Λ**

2. Αν $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{B\Gamma}+\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\vec{0}$, τότε $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{0}$. **Σ** **Λ**

3. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BA}$, τότε $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$. **Σ** **Λ**

4. Τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ είναι ίσα. **Σ** **Λ**

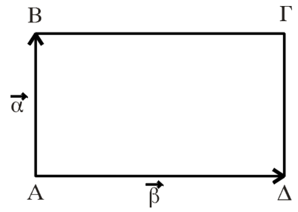
5. Αν $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|=|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$, τότε τα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι συγγραμμικά. **Σ** **Λ**

6. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

7. Για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|\le|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

8. Για τα αντίρροπα διανύσματα $\vec{\alpha}$, $\vec{\beta}$ ισχύει: $\left||\vec{\alpha}|-|\vec{\beta}|\right|=|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|$. **Σ** **Λ**

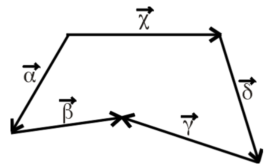
9. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι:
$\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta}=\vec{\beta}$.



α. Το διάνυσμα $\overrightarrow{A\Gamma}$ ισούται με $\vec{\alpha}+\vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

β. Το διάνυσμα $\overrightarrow{B\Delta}$ ισούται με $\vec{\beta}-\vec{\alpha}$ **Σ** **Λ**

10. Στο διπλανό σχήμα το διάνυσμα $\vec{x}$ ισούται με:

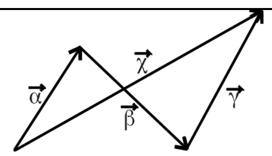


Α. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Β.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$

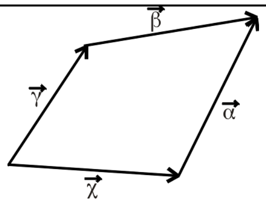
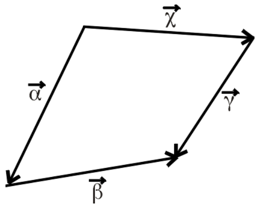
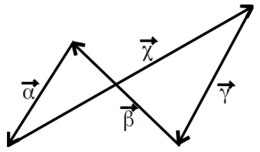
Γ. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}+\vec{\gamma}-\vec{\delta}$ **Δ.** $\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}-\vec{\delta}$

Ε. $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}+\vec{\delta}$

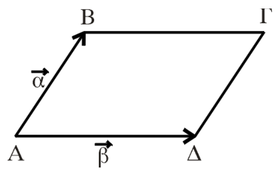
11. Σε κάθε σχήμα που βρίσκεται στη στήλη (Α) αντιστοιχεί μια τιμή του διανύσματος $\vec{x}$ που βρίσκεται στη στήλη (Β). Να συνδέσετε με μια γραμμή κάθε σχήμα της στήλης (Α) με το αντίστοιχο $\vec{x}$ της στήλης (Β).

στήλη Α	**στήλη Β**
	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}-\vec{\gamma}$ $\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}$ $-(\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma})$ $\vec{\alpha}-\vec{\beta}-\vec{\gamma}$

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

  	$\vec{\beta} + \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$ $\vec{\beta} - \vec{\gamma} - \vec{\alpha}$

12. Στο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι: $\overrightarrow{AB} = \vec{\alpha}$, $\overrightarrow{A\Delta} = \vec{\beta}$. Να αντιστοιχήσετε κάθε διάνυσμα της στήλης (Α) με το ίσο του της στήλης (Β).



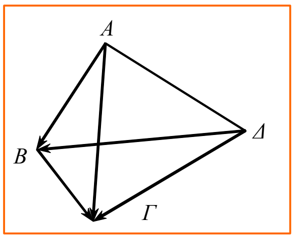
στήλη Α	στήλη Β
$\overrightarrow{A\Gamma}$	$-\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{\Gamma B}$	$\vec{\alpha}+\vec{\beta}$
$\overrightarrow{\Gamma\Delta}$	$\vec{\beta}-\vec{\alpha}$
$\overrightarrow{B\Delta}$	$\vec{\alpha}-\vec{\beta}$
	$-\vec{\beta}$

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

Ασκήσεις

1. Για τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ να αποδειχτεί ότι $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$.

Λύση



Αν Ο είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε έχουμε:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{O\Delta}+\overrightarrow{O\Gamma}-\overrightarrow{OA}=.$$

$$=\overrightarrow{\Delta B}+\overrightarrow{A\Gamma}$$

2. Να αποδειχτεί ότι $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}| \le |\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

Λύση

Έχουμε $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}+\vec{\gamma}|=|(\vec{\alpha}+\vec{\beta})+\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|\le|\vec{\alpha}|+|\vec{\beta}|+|\vec{\gamma}|$.

3. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Κ και Λ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΓΔ αντιστοίχως και Μ τυχαίο σημείο της ΑΔ, να αποδειχθεί ότι $\overrightarrow{MK}+\overrightarrow{A\Lambda}=\overrightarrow{M\Gamma}$.

4. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{B\Gamma}$.

5. Για τα μη συγγραμμικά και μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, να δείξετε ότι $\dfrac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|}+\dfrac{|\vec{\beta}|}{|\vec{\alpha}-\vec{\beta}|}\ge 1$.

6. Δίνεται κανονικό εξάγωνο ΑΒΓΔΕΖ, κέντρου Ο. Να βρεθούν τα διανύσματα:

α. $\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{ZA}$ β. $\overrightarrow{O\Gamma}-(\overrightarrow{EO}-\overrightarrow{\Delta E})$

γ. $\overrightarrow{\Delta O}-\overrightarrow{AB}$ δ. $\overrightarrow{\Delta Z}-\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{\Delta B}$

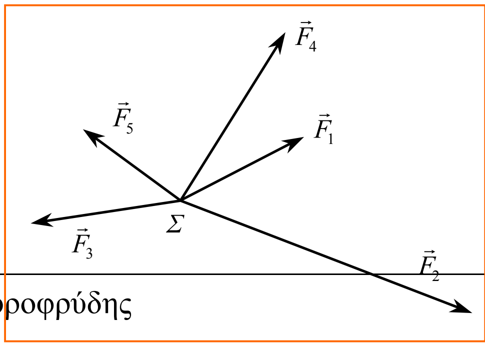
7. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Μ της πλευράς ΓΔ. Βρείτε τα διανύσματα:

α. $\overrightarrow{\Delta M}-\overrightarrow{AM}$ **β.** $\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{BM}$ **γ.** $\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{M\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}-\overrightarrow{AB}$

8. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τις ΒΓ και ΔΑ και παίρνουμε τμήματα $\Gamma Z = AE$. Να αποδείξετε ότι:

α. $\overrightarrow{BZ}+\overrightarrow{\Delta E}=\vec{0}$ β. $\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{\Gamma B}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}+\overrightarrow{AB}$ γ. $\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{Z\Delta}$

9. Οι δυνάμεις $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_5$ ασκούνται στο σώμα Σ. Ποια δύναμη χρειάζεται, ώστε να μην αφήσει το σώμα Σ να μετακινηθεί από τη θέση του;



An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

10. Δίνονται τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ και έστω $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}, \vec{\delta}$ τα αντίστοιχα διανύσματα θέσεως ως προς ένα σημείο αναφοράς Ο. Τι μπορείτε να πείτε για το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ αν:

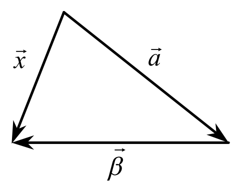
i. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$

ii. $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

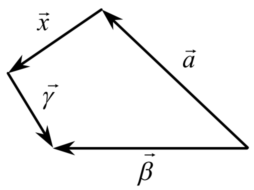
iii. $\vec{\alpha}+\vec{\gamma}=\vec{\beta}+\vec{\delta}$ και $|\vec{\alpha}-\vec{\gamma}|=|\vec{\beta}-\vec{\delta}|$

11. Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{x}$ σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα ως συνάρτηση των άλλων διανυσμάτων που δίνονται:

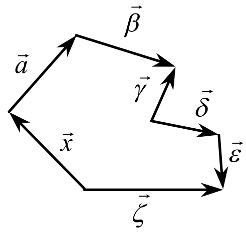
i)



ii)



iii)



12. Αν για δύο τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A\Delta E$ ισχύει $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{A\Delta}+\overrightarrow{AE}$, να δείξετε ότι το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.

13. Δίνονται τέσσερα σημεία A, B, Γ, Δ και έστω Ο, το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. Να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{O\Delta}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

14. Δίνεται κανονικό εξάγωνο $AB\Gamma\Delta EZ$. Αν $\overrightarrow{AB}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}=\vec{\beta}$, να εκφράσετε το διάνυσμα $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ως συνάρτηση των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

15. Για ένα τυχαίο εξάγωνο $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ να αποδείξετε ότι $\overrightarrow{P_1P_3}+\overrightarrow{P_2P_4}+\overrightarrow{P_3P_5}+\overrightarrow{P_4P_6}+\overrightarrow{P_5P_1}+\overrightarrow{P_6P_2}=\vec{0}$.

16. Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και το μέσο Ο της διαγωνίου του $B\Delta$. Να δειχτεί ότι $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{O\Gamma}=\overrightarrow{\Delta A}-\overrightarrow{\Gamma B}$.

17. Αν ισχύει $\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{B\Delta}+\overrightarrow{\Gamma Z}+\overrightarrow{\Delta A}+\overrightarrow{EB}=\vec{0}$, να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν τα σημεία $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z$ να είναι όλα διακεκριμένα.

18. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ. Να συγκρίνετε τα διανύσματα $\vec{x}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Delta\Gamma}$ και $\vec{y}=\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{\Delta B}$.

19. Αν ισχύει η σχέση $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{\Gamma A}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{\Gamma\Lambda}$, να αποδείξετε ότι τα σημεία Κ και Λ συμπίπτουν.

20. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Να βρεθεί σημείο Μ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A\Gamma}+\overrightarrow{AM}=\vec{0}$.

21. Αν είναι $|\vec{\alpha}|=\frac{3}{4}$, $|\vec{\beta}|=\frac{1}{4}$ και $|\vec{\alpha}+\vec{\beta}|\geq 1$, να αποδείξετε ότι $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.

1.2 Πρόσθεση και Αφαίρεση διανυσμάτων

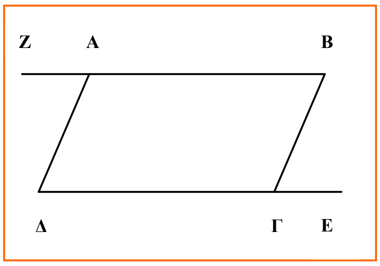
22. Δίνεται τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων Μ του επιπέδου για τα οποία ισχύει ότι $|\vec{M\Delta}+\vec{B\Gamma}|=|\vec{MA}|$.

23. Δίνεται το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Βρείτε σημείο Μ του επιπέδου του, τέτοιο ώστε:

i. $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Gamma}=\vec{M\Delta}$

ii. $\vec{A\Gamma}+\vec{\Delta B}=\vec{AB}+\vec{MB}$

24. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $\Gamma E=AZ$. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).



i. $\vec{BA}+\vec{B\Gamma}=\vec{A\Gamma}$ **Σ Λ**

ii. $\vec{A\Delta}+\vec{\Delta\Gamma}=\vec{A\Gamma}$ **Σ Λ**

iii. $\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}=\vec{0}$ **Σ Λ**

iv. $\vec{ZA}+\vec{B\Gamma}=\vec{\Delta Z}$ **Σ Λ**

v. $|\vec{ZB}-\vec{Z\Delta}|=|\vec{\Delta B}|$ **Σ Λ**

vi. $\vec{AB}-\vec{A\Gamma}=\vec{A\Delta}$ **Σ Λ**

vii. $\vec{Z\Delta}+\vec{AB}=\vec{ZE}+\vec{AZ}$ **Σ Λ**

25. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ με $AB//\Gamma\Delta$. Από το Δ η παράλληλη προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να βρείτε σημείο Μ τέτοιο ώστε $\vec{MA}+\vec{MB}+\vec{M\Delta}=\vec{ME}+\vec{M\Gamma}$

26. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν Κ το σημείο τομής των διαγωνίων του, να αποδείξετε ότι:

i. $\vec{KA}+\vec{KB}+\vec{K\Gamma}+\vec{K\Delta}=\vec{0}$.

ii. Αν Ο τυχαίο σημείο του επιπέδου του τότε $\vec{OA}+\vec{O\Gamma}=\vec{OB}+\vec{O\Delta}$.

27. Δίνονται τα σημεία A,B,Γ. Ορίζουμε τα σημεία Δ και Ε από τις σχέσεις: $\vec{\Gamma\Delta}+\vec{AB}=\vec{0}$ και $\vec{\Gamma E}+\vec{BA}=\vec{0}$. Να αποδείξετε ότι το Γ είναι μέσο του ΔΕ.

28. Θεωρούμε τα μη συνευθειακά σημεία A,B,Γ,Δ και το μέσο Μ της ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\vec{MB}+\vec{M\Delta}=\vec{AB}-\vec{\Delta\Gamma}=\vec{A\Delta}+\vec{\Gamma B}$.

An evaluation version of novaPDF was used to create this PDF file.
Purchase a license to generate PDF files without this notice.