1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

ΜΑΘΗΣΙΑΚΟΙ ΣΤΟΧΟΙ: Ο μαθητής πρέπει:

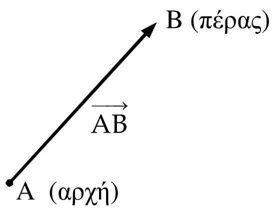
- να κατανοήσει τις έννοιες : διάνυσμα, μηδενικό διάνυσμα, φορέας-διεύθυνση, κατεύθυνση - φορά , μέτρο διανύσματος, παραλληλία διανύσματος με ευθεία, συγγραμμικά διανύσματα, ομόρροπα διανύσματα, αντίρροπα διανύσματα, ίσα διανύσματα, αντίθετα διανύσματα, γωνία δύο διανυσμάτων
- να βρίσκει και να δικαιολογεί την ισότητα δύο διανυσμάτων, γεωμετρικά, αλγεβρικά
- να αναγνωρίζει τις ισότητες διανυσμάτων που προκύπτουν από τυχόν παραλληλόγραμμο
- να αναγνωρίζει και να υπολογίζει την γωνία δύο διανυσμάτων.

• Διανυσματικά και μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη

Μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται από το μέτρο τους και από την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης, λέγονται **μονόμετρα** ή **βαθμωτά**. Τέτοια μεγέθη είναι η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ.,
Μεγέθη που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε ακόμα τη διεύθυνση και τη φορά τους, λέγονται **διανυσματικά** μεγέθη ή απλώς **διανύσματα**. Τέτοια μεγέθη είναι η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ.

• Το διάνυσμα στη Γεωμετρία

Γεωμετρικά ορίζουμε σαν **διάνυσμα** κάθε προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή **διάνυσμα** είναι το κάθε ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα. Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.



Το διάνυσμα με αρχή το Α και πέρας το Β συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το Α και καταλήγει στο Β.

Το διάνυσμα με αρχή το Β και πέρας το Α συμβολίζεται με $\overrightarrow{BA}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το Β και καταλήγει στο Α.

Πρόσεξε ότι αν $A \neq B$ τότε $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$.

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα, το οποίο μπορούμε να το συμβολίσουμε και με $\vec{0}$.

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

📖 **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{AB}=\vec{0}$ τότε τα άκρα ταυτίζονται οπότε $A\equiv B$ και αντιστρόφως.

Για το συμβολισμό των διανυσμάτων χρησιμοποιούμε πολλές φορές τα μικρά γράμματα του ελληνικού ή του λατινικού αλφάβητου επιγραμμισμένα με βέλος για παράδειγμα, $\vec{\alpha},\vec{\beta},...,\vec{u},\vec{v},...$

- **Μέτρο διανύσματος**

Η **απόσταση** των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το **μήκος** του ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ, λέγεται **μέτρο** ή **μήκος** του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$.

Αν $\overrightarrow{AB}\neq\vec{0}$ τότε $|\overrightarrow{AB}|>0$, ενώ $|\vec{0}|=0$, οπότε είναι πάντα $|\overrightarrow{AB}|\geq 0$.

📖 **Πρόσεξε** ότι το μέτρο ενός διανύσματος είναι ένας μη αρνητικός πραγματικός αριθμός!

📖 **Πρόσεξε** Μην ταυτίζεις ποτέ το διάνυσμα με το μέτρο του!

📖 **Πρόσεξε** ότι $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$.

- **Το μοναδιαίο διάνυσμα**

Αν το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ έχει μέτρο **1**, δηλαδή αν ισχύει ότι $|\overrightarrow{AB}|=1$, τότε λέγεται **μοναδιαίο** διάνυσμα.

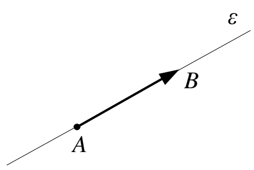
- **Η διεύθυνση και η φορά (εγκυκλοπαιδικά)**

Αν έχουμε μια ευθεία ε, τότε το σύνολο όλων των ευθειών που είναι παράλληλες σ' αυτή λέμε ότι ορίζουν μια διεύθυνση. Η διεύθυνση αυτή είναι ορισμένη, αν δοθεί μια οποιαδήποτε από τις παράλληλες ευθείες η οποία λέγεται και αντιπρόσωπος της διεύθυνσης.

Σε καθεμία από τις ευθείες που έχουν την ίδια διεύθυνση διακρίνουμε δύο φορές. Η μια θεωρείται αυθαίρετα ως η θετική φορά οπότε, η άλλη θα θεωρείται ως η αρνητική.

- **Διεύθυνση και φορέας διανύσματος**

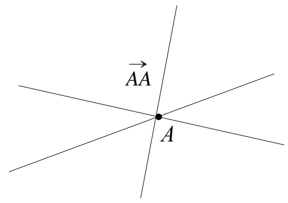
Ως διεύθυνση ενός διανύσματος ορίζουμε τη διεύθυνση της ευθείας στην οποία βρίσκεται το διάνυσμα.



1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\overrightarrow{AB}$.

Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ μπορούμε να θεωρούμε **οποιαδήποτε** από τις ευθείες που διέρχονται από το Α.

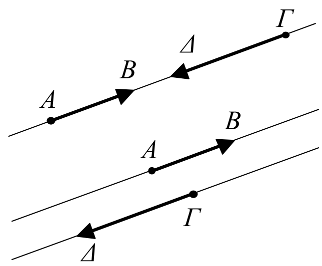


- **Διάνυσμα παράλληλο προς ευθεία**

Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ε, τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ε και γράφουμε $\overrightarrow{AB}//\varepsilon$.

- **Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα**

Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

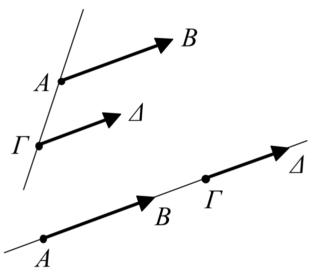


- **Διανύσματα ομόρροπα και αντίρροπα**

Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε ομόρροπα και αντίρροπα. Συγκεκριμένα:

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:

α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία ΑΓ που ενώνει τις αρχές τους ή

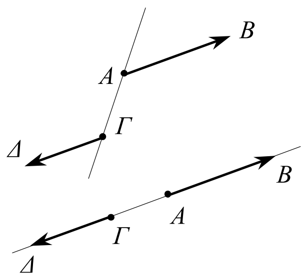


β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες ΑΒ και ΓΔ περιέχει την άλλη.

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

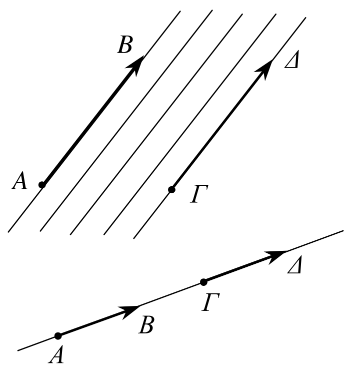
— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



📖 **Πρόσεξε** ότι αναγκαία συνθήκη για να είναι δυο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είτε ομόρροπα είτε αντίρροπα είναι να είναι συγγραμμικά! Αν δεν είναι συγγραμμικά τότε **δεν έχει νόημα** να μιλάμε για ομόρροπα ή αντίρροπα διανύσματα!

- **Ίσα διανύσματα**

Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν την **ίδια κατεύθυνση και ίσα μέτρα**. Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι ίσα, γράφουμε $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Επομένως ισχύει: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{\Gamma\Delta}\right| \\ \text{και} \\ \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta} \end{cases}$

📖 **Πρόσεξε** ότι τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους.

📖 **Πρόσεξε** ότι από τον ορισμό της ισότητας διανυσμάτων γίνεται φανερό ότι ένα διάνυσμα μπορεί να παρασταθεί με ένα ευθύγραμμο τμήμα το οποίο έχει ορισμένο μήκος, διεύθυνση και φορά αλλά όχι συγκεκριμένη θέση στο χώρο.

- **Ιδιότητες της ισότητας στα διανύσματα (εγκυκλοπαιδικά)**

Για την ισότητα στο σύνολο των διανυσμάτων ισχύουν οι σχέσεις:

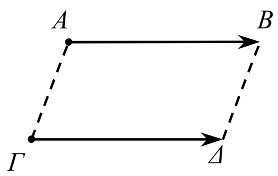
α. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB}$ (ανακλαστική)

β. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{AB}$ (συμμετρική)

γ. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=\overrightarrow{EZ}$ τότε και $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{EZ}$ (μεταβατική)

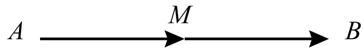
Σημείωση: Μια σχέση που είναι ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική λέγεται σχέση ισοδυναμίας, οπότε η ισότητα στο σύνολο των διανυσμάτων (αλλά και γενικά) είναι σχέση ισοδυναμίας.

- **Προτάσεις**

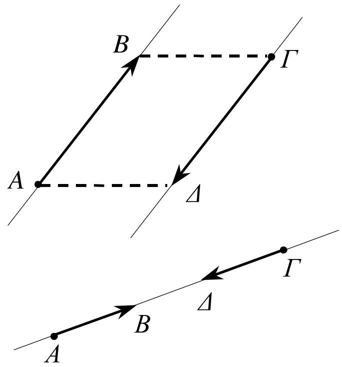


Εύκολα αποδεικνύεται ότι:

- Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma}=\overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
- Αν Μ είναι το μέσον του ΑΒ, τότε $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



- **Αντίθετα διανύσματα**



Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν **αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα**.

Για να δηλώσουμε ότι δύο διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ είναι αντίθετα, γράφουμε $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ ή $\overrightarrow{\Gamma\Delta}=-\overrightarrow{AB}$.

Είναι φανερό ότι $\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}\Leftrightarrow\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.

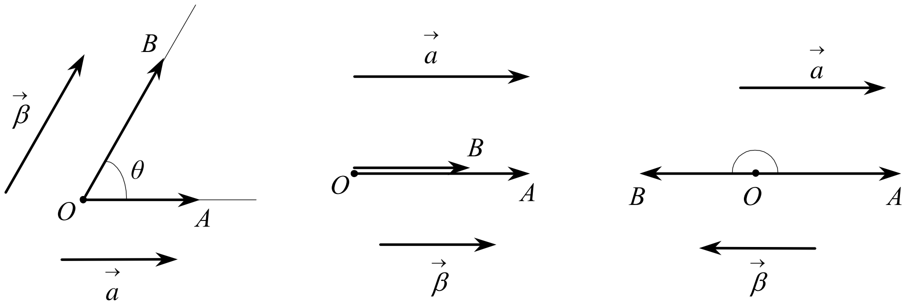
Ειδικότερα, έχουμε $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$.

📖 **Πρόσεξε** ότι τα αντίθετα διανύσματα έχουν **ίσα μέτρα**, δηλαδή $|\overrightarrow{AB}|=|-\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BA}|$ και **ίδια διεύθυνση**, δηλαδή είναι συγγραμμικά, οπότε $\overrightarrow{AB}//-\overrightarrow{AB}//\overrightarrow{BA}$ αλλά είναι **αντίρροπα**.

- **Γωνία δύο διανυσμάτων – διανύσματα ορθογώνια ή κάθετα**

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$. Με αρχή ένα σημείο Ο παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA}=\vec{\alpha}$ και $\overrightarrow{OB}=\vec{\beta}$.

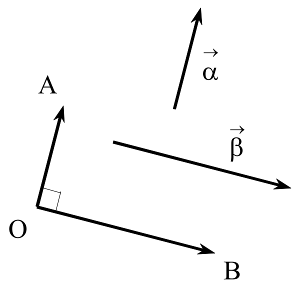


Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες ΟΑ και ΟΒ, την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων** $\vec{\alpha}$ **και** $\vec{\beta}$ και τη συμβολίζουμε με $(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}})$ ή $(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα $\hat{\theta}$.

Αποδεικνύεται ότι η γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του σημείου Ο. Είναι φανερό επίσης ότι $0^0 \le \hat{\theta} \le 180^0$ ή σε ακτίνια $0 \le \hat{\theta} \le \pi$ και ειδικότερα:

- $\hat{\theta}=0$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$.
- $\hat{\theta}=\pi$, αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$.

Αν $\hat{\theta}=\frac{\pi}{2}$, τότε λέμε ότι τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι **ορθογώνια** ή **κάθετα** και γράφουμε $\vec{\alpha}\perp\vec{\beta}$.



📖 **Πρόσεξε** ότι αν ένα από τα διανύσματα $\vec{\alpha},\vec{\beta}$ είναι το μηδενικό διάνυσμα, τότε ως γωνία των $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ μπορούμε να θεωρήσουμε οποιαδήποτε γωνία $\hat{\theta}$ με $0 \le \hat{\theta} \le \pi$. Έτσι, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το μηδενικό διάνυσμα, $\vec{0}$, είναι ομόρροπο ή αντίρροπο ή ακόμη και κάθετο σε κάθε άλλο διάνυσμα.

Έλεγχος γνώσεων

Α! Γενικές ερωτήσεις

1. Τι είναι μονόμετρο και τι διανυσματικό μέγεθος;
2. Τι καλείται διάνυσμα στη Γεωμετρία;

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

3. Ποιο διάνυσμα λέγεται μηδενικό;
4. Τι είναι μέτρο ενός διανύσματος;
5. Ποιο διάνυσμα καλείται μοναδιαίο;
6. Τι καλείται φορέας ενός διανύσματος;
7. Ποια διανύσματα καλούνται συγγραμμικά;
8. Ποια διανύσματα καλούνται ομόρροπα;
9. Ποια διανύσματα καλούνται αντίρροπα;
10. Πότε δύο διανύσματα καλούνται ίσα;
11. Πότε δύο διανύσματα καλούνται αντίθετα;
12. Πως ορίζεται η γωνία δύο διανυσμάτων;
13. Πότε δύο διανύσματα καλούνται κάθετα ή ορθογώνια;

Β! Ερωτήσεις κρίσεως

1. Το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι:
   α) μηδενικό; β) μοναδιαίο; γ) έχει μέτρο 1; δ) έχει μέτρο 0.
2. Το μηδενικό διάνυσμα:
   α) δεν έχει φορέα, β) έχει φορέα την οποιαδήποτε ευθεία, γ) έχει φορέα την οποιαδήποτε ευθεία που διέρχεται από το σημείο που καθορίζουν τα ταυτιζόμενα άκρα του.
3. Το μέτρο ενός διανύσματος είναι:
   α) αρνητικός αριθμός, β) θετικός αριθμός, γ) αριθμός μη αρνητικός, δ) οποιοσδήποτε αριθμός.
4. Αν $|\overrightarrow{AB}| = 1$ και $|\overrightarrow{\Gamma\Delta}| = 1$, τότε:
   α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, δ) $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, μοναδιαία διανύσματα.
5. Αν $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, β) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, γ) έχουν ίδια διεύθυνση, δ) έχουν ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά.
6. Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε:
   α) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$, β) $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ και $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{\Gamma\Delta}|$, γ) $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, δ) $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Delta\Gamma}$.
7. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=θ, τότε:
   α) $0^\circ \le \theta \le 180^\circ$, β) $0^\circ \le \theta \le 360^\circ$, γ) $-180^\circ \le \theta \le 180^\circ$, δ) $0^\circ \le \theta \le 90^\circ$.
8. Αν $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 360^\circ$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 90^\circ$, γ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 180^\circ$, δ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 0^\circ$.
9. Αν $\overrightarrow{AB} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$ τότε:
   α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 360^\circ$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 90^\circ$, γ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 180^\circ$, δ) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = 0^\circ$.
10. Αν $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$=θ, τότε: α) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = -\left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)$, β) $\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right) = \left(\widehat{\vec{\beta},\vec{\alpha}}\right)$.

1.1 Η Έννοια του Διανύσματος

Μέθοδοι και τεχνικές για την επίλυση των ασκήσεων

1. Αν μας ζητούν να αποδείξουμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{ΑΒ}$ και $\overrightarrow{ΓΔ}$ είναι ίσα θα εργαζόμαστε ως εξής: Θα δείχνουμε ότι τα διανύσματα αυτά είναι ομόρροπα και έχουν ίσα μέτρα ή θα δείχνουμε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΔ και ΒΓ έχουν το ίδιο μέσο, δηλαδή τα ΑΔ και ΒΓ διχοτομούνται.

2. **Πρόσεξε** ότι τα μοναδιαία διανύσματα δεν είναι ίσα, αλλά απλώς έχουν όλα μέτρο ίσο με 1.

3. **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΑΓ}$ τότε $Β\equiv Γ$ και αν $\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΓΒ}$ τότε $Α\equiv Γ$.

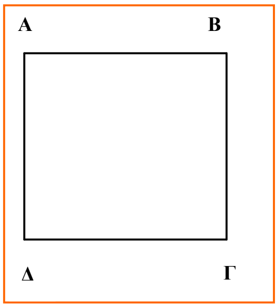
4. **Πρόσεξε** ότι αν $\overrightarrow{ΑΜ}=\overrightarrow{ΜΒ}$ τότε το Μ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ, εφόσον $Α\neq Β$.

5. **Πρόσεξε** ότι αν $|\overrightarrow{ΑΜ}|=|\overrightarrow{ΜΒ}|$ και τα σημεία Α, Β, Μ δεν είναι συνευθειακά, τότε το Μ βρίσκεται πάνω στη μεσοκάθετη του ευθυγράμμου τμήματος ΑΒ.

6. **Πρόσεξε** ότι αν $|\overrightarrow{ΟΜ}|=ρ,\ \ ρ>0$, όπου Ο ένα σταθερό σημείο και Μ ένα τυχαίο (μεταβλητό) σημείο, τότε το σημείο Μ βρίσκεται πάνω σε έναν κύκλο που έχει κέντρο το σημείο Ο και ακτίνα ίση με ρ.

Θέματα προς εμπέδωση

1. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) στις παρακάτω ισότητες.

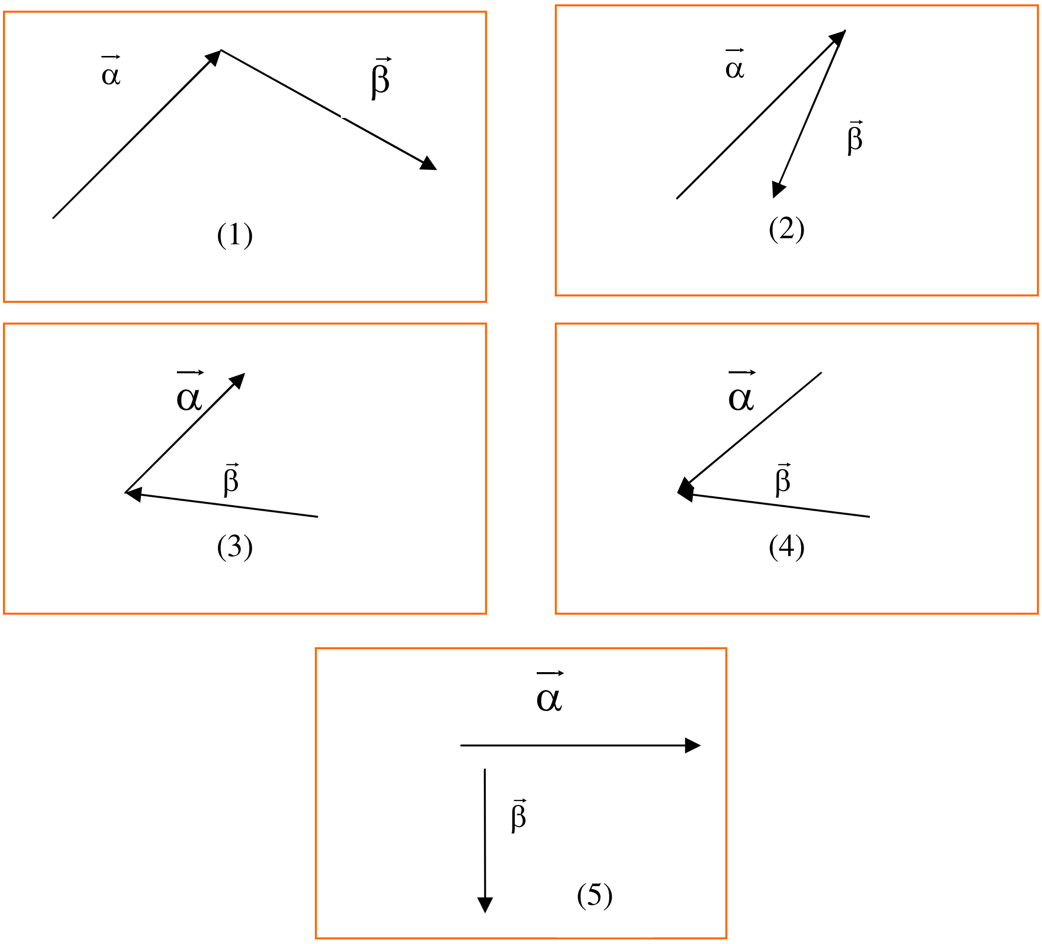


i.	$\overrightarrow{ΑΒ}=\overrightarrow{ΓΔ}$	**Σ**	**Λ**
ii.	$\overrightarrow{ΑΔ}=\overrightarrow{ΒΓ}$	**Σ**	**Λ**
iii.	$\overrightarrow{ΑΓ}=\overrightarrow{ΒΔ}$	**Σ**	**Λ**

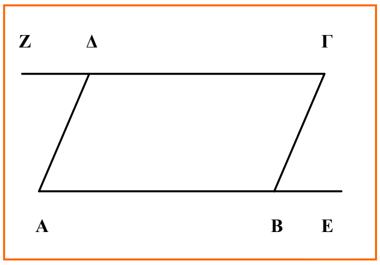
2. Δίνεται ένα τετράγωνο ΑΒΓΔ. Να κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος) στις παρακάτω ισότητες.

i.	$\lvert\overrightarrow{ΑΒ}\rvert=\lvert\overrightarrow{ΓΔ}\rvert$	**Σ**	**Λ**
ii.	$\lvert\overrightarrow{ΑΓ}\rvert=\lvert\overrightarrow{ΒΔ}\rvert$	**Σ**	**Λ**
iii.	$\left(\widehat{\overrightarrow{ΒΑ},\overrightarrow{ΒΔ}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$	**Σ**	**Λ**
iv.	$\left(\widehat{\overrightarrow{ΔΑ},\overrightarrow{ΒΔ}}\right)=\dfrac{\pi}{4}$	**Σ**	**Λ**

3. Να σημειώσετε τη γωνία $\left(\widehat{\vec{α},\vec{β}}\right)$ στις ακόλουθες περιπτώσεις.



4. Θεωρούμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα $\mathrm{BE}=\Gamma\mathrm{Z}$. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).



i. $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}$ Σ Λ

ii. $\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}\uparrow\downarrow\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ Σ Λ

iii. $|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}}|$ Σ Λ

iv. $\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}\uparrow\uparrow\overrightarrow{\mathrm{B}\Gamma}$ Σ Λ

v. $\overrightarrow{\Delta\Gamma}=\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ Σ Λ

vi. $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ Σ Λ

vii. $|\overrightarrow{\mathrm{ZA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{E}\Gamma}|$ Σ Λ

viii. $\overrightarrow{\mathrm{EA}}=\overrightarrow{\Gamma\mathrm{Z}}$ Σ Λ

ix. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta\mathrm{Z}},\overrightarrow{\Gamma\mathrm{B}}}\right)=\left(\widehat{\overrightarrow{\mathrm{BE}},\overrightarrow{\mathrm{A}\Delta}}\right)$ Σ Λ

x. $\left(\widehat{\overrightarrow{\Delta Z},\overrightarrow{A\Delta}}\right)=\pi-\left(\widehat{\overrightarrow{\Gamma\Delta},\overrightarrow{\Gamma B}}\right)$ **Σ** **Λ**

5. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).

i. Για κάθε διάνυσμα $\vec{\alpha}$ ισχύει $|\vec{\alpha}|=|-\vec{\alpha}|$ **Σ** **Λ**

ii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ **Σ** **Λ**

iii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow-\vec{\beta}$ τότε $-\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ **Σ** **Λ**

iv. Ισχύει ότι $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow-(-\vec{\alpha})$ **Σ** **Λ**

v. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\uparrow-\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ **Σ** **Λ**

6. Ποιοι από τους παρακάτω ισχυρισμούς είναι σωστοί και ποιοι λανθασμένοι. Κυκλώσετε το Σ (σωστό) ή το Λ (λάθος).

i. Αν $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A\Gamma}$, τότε $B\equiv\Gamma$ **Σ** **Λ**

ii. Αν $\vec{\alpha}\uparrow\downarrow\vec{\beta}$ και $\vec{\beta}\uparrow\downarrow\vec{\gamma}$ τότε $\vec{\alpha}\uparrow\uparrow\vec{\gamma}$ **Σ** **Λ**

iii. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι

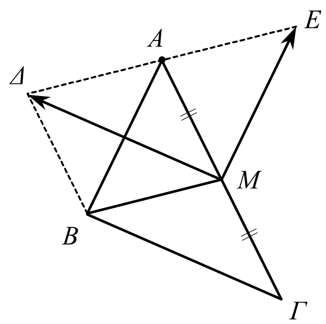
$\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\left(\widehat{-\vec{\alpha},-\vec{\beta}}\right)$ **Σ** **Λ**

iv. Για τα μη μηδενικά διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ ισχύει ότι

$\left(\widehat{-\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)=\pi-\left(\widehat{\vec{\alpha},\vec{\beta}}\right)$ **Σ** **Λ**

Ασκήσεις

1. Έστω Μ το μέσο της πλευράς ΑΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ. Με αρχή το Μ γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το Α είναι το μέσο του ΔΕ.



Λύση

Επειδή $\overrightarrow{M\Delta}=\overrightarrow{\Gamma B}$, είναι $\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{\Delta B}$ (1). Όμως Μ μέσο του ΑΓ. Άρα, $\overrightarrow{M\Gamma}=\overrightarrow{AM}$ (2). Λόγω των (1) και (2), έχουμε $\overrightarrow{\Delta B}=\overrightarrow{AM}$, οπότε: $\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{BM}$ (3). Επειδή επιπλέον $\overrightarrow{ME}=\overrightarrow{BA}$, έχουμε $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{BM}$ (4). Έτσι, από τις σχέσεις (3) και (4) έχουμε $\overrightarrow{\Delta A}=\overrightarrow{AE}$, οπότε Α είναι το μέσο του ΔΕ.

2. Έστω ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και ονομάζουμε Κ,Λ,Μ τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ αντίστοιχα.

α) Να εξετάσετε αν τα διανύσματα $\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{M\Lambda}$ είναι ίσα ή αντίθετα ομοίως και για τα $\overrightarrow{\Gamma M}, \overrightarrow{K\Lambda}$.

β) Να υπολογιστούν οι $\left(\widehat{\overrightarrow{K\Lambda}, \overrightarrow{KM}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{\Lambda M}, \overrightarrow{\Lambda B}}\right)$, $\left(\widehat{\overrightarrow{K\Gamma}, \overrightarrow{KB}}\right)$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma\Delta} = \overrightarrow{BA}$ και $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{A\Gamma}$. Δείξετε ότι το σημείο Γ είναι το μέσο του ευθυγράμμου τμήματος ΔΕ.

4. Πάνω στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ παίρνουμε τα σημεία Μ και Ν αντίστοιχα και γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{AM}$ και $\overrightarrow{AZ} = \overrightarrow{\Gamma N}$. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΖΜΕΝ είναι παραλληλόγραμμο.

5. Εξωτερικά του παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΒΕΖ και ΔΓΘΗ. Να αποδείξετε ότι:

i. $\overrightarrow{ZH} = \overrightarrow{E\Theta}$, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{B\Theta}$, $\overrightarrow{Z\Delta} = \overrightarrow{AH}$.

ii. Τα ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ και ΗΕ έχουν κοινό μέσο.

iii. Το κέντρο Ο του ΑΒΓΔ είναι κοινό μέσο των ΕΗ και ΖΘ.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και έστω Μ μέσο της πλευράς του ΑΓ. Γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{\Gamma B}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{AB}$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ,Β,Ε είναι συνευθειακά και ότι το Β είναι το μέσο του ΔΕ.

7. Έστω Μ και Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ καθώς και τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{B\Gamma}$ και $\overrightarrow{NE} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδείξετε ότι τα ευθύγραμμα τμήματα ΜΔ, ΝΕ, ΑΓ έχουν κοινό μέσο.

8. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ. Να βρεθούν τα σημεία Χ του επιπέδου έτσι ώστε τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{AX}$ να έχουν:

α) την ίδια κατεύθυνση, β) την ίδια διεύθυνση και το ίδιο μέτρο.

γ) την ίδια διεύθυνση, δ) το ίδιο μήκος.